CÁLCULO VECTORIAL

Notas de clase

TEMA II
FUNCIONES VECTORIALES

Profesor: A. Leonardo Bañuelos Saucedo

TEMA II

FUNCIONES VECTORIALES

INTRODUCCIÓN

En el capítulo pasado se estudiaron funciones escalares de variable vectorial $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que se presentaron como una generalización de las *funciones escalares de variable escalar*[1] $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vistas en los cursos de Cálculo Diferencial (CD) y Cálculo Integral (CI). Ahora, en este capítulo se presentarán las funciones vectoriales, que son una generalización de las funciones escalares vistas anteriormente.

Muchos de los problemas a los que se enfrentan los ingenieros, consisten en el análisis de fenómenos físicos, y por lo tanto requieren de la descripción de magnitudes físicas. Estas cantidades, las podemos clasificar en dos grandes categorías: escalares y vectoriales.

Algunos ejemplos de cantidades escalares son:

Temperatura
Voltaje
Masa
Densidad
Tiempo
Volumen
Presión
Números ordinarios

Mientras que dentro de las cantidades vectoriales se tiene:

Fuerza
Posición
Velocidad
Aceleración
Campos eléctricos y magnéticos

1 También llamadas funciones reales de variable real.

Puesto que la naturaleza de las cantidades es distinta, conviene dar a cada categoría un enfoque de estudio diferente. Así, para las cantidades vectoriales se ha desarrollado un análisis que simplifica considerablemente los cálculos. El análisis vectorial proporciona una serie de herramientas útiles para que el ingeniero pueda resolver problemas que de otra forma le serían muy difíciles.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN VECTORIAL

Definición 2.1
Una función vectorial es una regla de transformación tal que a cada punto de un dominio le corresponde un vector.

Si se tiene una sola variable independiente se dice que es una *función vectorial de variable escalar (real)*.

Si hay más de una variable independiente (dos o más), se dice que es una *función vectorial de variable vectorial*.

Para hacer referencia a una función vectorial de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, se utiliza la siguiente notación $\bar{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Donde la notación $A \subset \mathbb{R}^n$ indica que el dominio A de la función $\bar{F}$ es en general un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Los siguientes son algunos ejemplos de funciones vectoriales.

EJEMPLOS GEOMÉTRICOS

- Ecuación vectorial de la recta en el espacio.

$$\bar{l}(t) = (x_0 + at)\,\boldsymbol{i} + (y_0 + bt)\,\boldsymbol{j} + (z_0 + ct)\,\boldsymbol{k}$$

Donde (x_0, y_0, z_0) es un punto de la recta con dirección del vector $[a, b, c]$.

- Ecuación vectorial del plano.

$$\bar{r}(t,s) = (x_0 + a_1 t + a_2 s)\,\boldsymbol{i} + (y_0 + b_1 t + b_2 s)\,\boldsymbol{j} + (z_0 + c_1 t + c_2 s)\,\boldsymbol{k}$$

Donde (x_0, y_0, z_0) es un punto del plano y $[a_1, b_1, c_1]$, $[a_2, b_2, c_2]$ son dos vectores no paralelos contenidos en el plano.

- Ecuación vectorial de una curva en el espacio.

$$\bar{r}(t) = f_1(t)\,\boldsymbol{i} + f_2(t)\,\boldsymbol{j} + f_3(t)\,\boldsymbol{k}$$

Donde $f_i(t)$ $i=1,2,3$ son funciones escalares de variable escalar.

- Ecuación vectorial de una superficie.

$\bar{\boldsymbol{r}}(t,s) = f_1(t,s)\,\boldsymbol{i} + f_2(t,s)\,\boldsymbol{j} + f_3(t,s)\,\boldsymbol{k}$

Donde $f_i(t,s)$ $i = 1,2,3$ son funciones escalares de variable vectorial.

EJEMPLOS FÍSICOS

- Función vectorial que describe la velocidad de flujo en una tubería.

Imagínese que se desea modelar la velocidad en cada punto de un fluido que corre por una tubería. Entonces se tiene un función vectorial de variable vectorial del tipo

$$\bar{\boldsymbol{v}}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\,\boldsymbol{i} + f_2(x,y,z)\,\boldsymbol{j} + f_3(x,y,z)\,\boldsymbol{k}$$

Donde $f_i(x,y,z)$ $i = 1,2,3$ son funciones escalares de variable de vectorial.

- Función vectorial que describe la dirección y la magnitud del flujo de calor.

Si se calienta un extremo de una placa metálica, es posible modelar el flujo de energía mediante una función vectorial.

Es importante observar que un caso particular de funciones vectoriales de variable vectorial, se tiene cuando las dimensiones del dominio y recorrido de la función son iguales, cuando esto sucede, a las funciones se les llama *campos vectoriales*.

Definición 2.2

Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$, es una función vectorial de variable vectorial que asocia un vector $\bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{x}})$ a cada punto $\bar{\boldsymbol{x}}$ de un dominio. Se denota por $\bar{\boldsymbol{F}} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Campo vectorial es un concepto esencial del Cálculo Vectorial., es decir, del curso de Cálculo III.

Los ejemplos físicos que se presentaron de funciones vectoriales, son ejemplos también de campos vectoriales. Algunos otros ejemplos de campos vectoriales son los siguientes.

EJEMPLOS DE CAMPOS VECTORIALES

- La velocidad en cada punto de un disco circular giratorio.

Si se desea conocer la velocidad lineal en cada punto de un disco circular, por ejemplo un disco compacto, se tiene un vector de velocidad en $\mathbb{R}^2$ para cada punto de $\mathbb{R}^2$.

- La fuerza de atracción de la Tierra sobre un cuerpo.

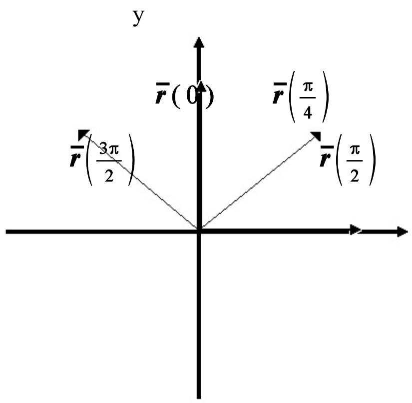
El campo de fuerza gravitacional, modelado de acuerdo con la ley de Newton $\bar{\boldsymbol{F}} = -\dfrac{mMG}{r^3}\,\bar{\boldsymbol{r}}$, es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE ESCALAR $\bar{\boldsymbol{F}} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \quad n = 2,3$

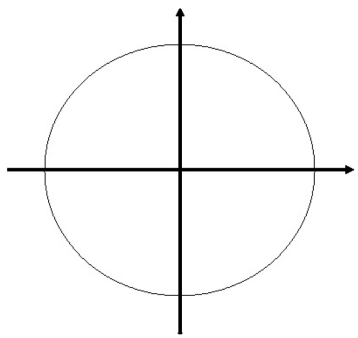
Al igual que las funciones estudiadas en los cursos de CI, CII, y el primer capítulo de este curso, las funciones vectoriales pueden representarse de manera gráfica. Por ejemplo, la función vectorial

$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) = 3\,\mathrm{sen}\,t\,\boldsymbol{i} + 3\cos t\,\boldsymbol{j} \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$

representa un familia de vectores que parten del origen, con dirección variable y módulo constante de tres unidades. Algunos de estos vectores se encuentran trazados en el siguiente dibujo.



Puede observarse, que las puntas de los vectores describen una curva. Esta es una de las aplicaciones de las funciones vectoriales, donde dichas funciones pueden representar el movimiento de una partícula a lo largo de una curva, o bien pueden representar la gráfica de una curva. Por ejemplo, la función anterior describe una circunferencia con centro en el origen y radio tres.

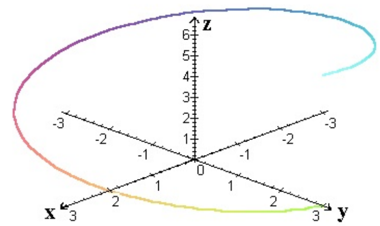


Esta última representación para funciones vectoriales de variable escalar es la más común, y por ello, como ejemplo de función vectorial se mencionó la ecuación vectorial de una recta en el espacio, así como la ecuación vectorial de una curva en el espacio.

Entonces, una función que va de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^3$ puede representar, en general, una curva en el espacio. Por ejemplo la función

$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) = 3\,\text{sen}\,t\ \boldsymbol{i} + 3\cos t\ \boldsymbol{j} + t\ \boldsymbol{k} \quad , \quad t \in [\,0, 2\pi\,]$$

representa una porción de hélice.



Ejemplo 2.1

Obtener la gráfica de las siguientes funciones vectoriales

a) $\bar{\boldsymbol{r}}(t) = 3t\ \boldsymbol{i} + (t-1)\ \boldsymbol{j}$ b) $\bar{\boldsymbol{r}}(t) = 2\cos t\ \boldsymbol{i} + 2\,\text{sen}\,t\ \boldsymbol{j}$

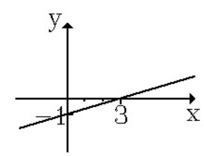
Resolución

a) $x = 3t \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{x}{3}$

$y = t - 1 \quad \Rightarrow \quad t = y + 1$

Igualando $\dfrac{x}{3} = y + 1 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{1}{3}x - 1$

Finalmente

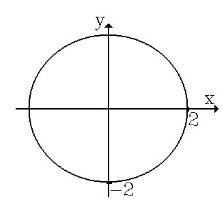


b) $x = 2\cos t \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4\cos^2 t$

$y = 2\,\text{sen}\,t \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4\,\text{sen}^2 t$

Entonces: $x^2 + y^2 = 4(\text{sen}^2 t + \cos^2 t) \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = (2)^2$

Finalmente

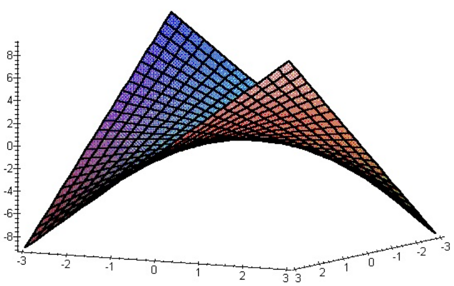


REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES VECTORIALES $\bar{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Si la función vectorial proporciona el vector de posición de un punto en $\mathbb{R}^3$, entonces la función $\bar{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ puede representar, en general, una superficie en el espacio. Por ejemplo, la función vectorial

$$\bar{r}(t,s) = t\,\boldsymbol{i} + s\,\boldsymbol{j} + ts\,\boldsymbol{k}$$

representa un paraboloide hiperbólico rotado 45º.



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE CAMPOS VECTORIALES $\bar{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad n = 2, 3$

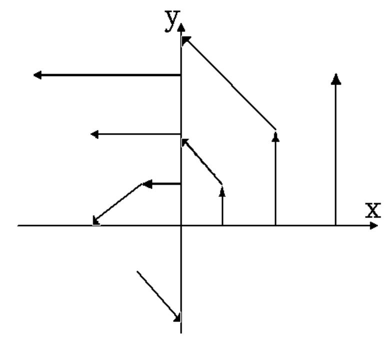
Los campos vectoriales se representan de una manera muy particular, pero antes de estudiar su representación es conveniente observar la tabulación y dibujo de algunos vectores de un campo.

Por ejemplo, si se desea conocer la gráfica del campo vectorial

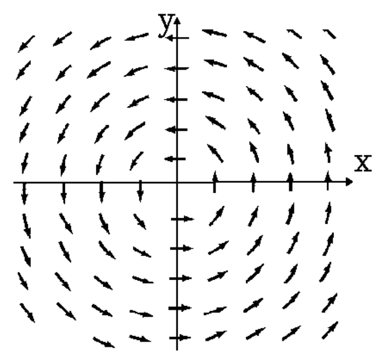
$$\bar{F}(x,y) = -y\,\boldsymbol{i} + x\,\boldsymbol{j}$$

se puede realizar una tabulación para distintos puntos y posteriormente dibujarlos.

(x,y)	$\bar{F}(x,y)$	(x,y)	$\bar{F}(x,y)$
(1,0)	$\boldsymbol{j}$	(-1,-1)	$\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$
(2,0)	$2\boldsymbol{j}$	(0,1)	$-\boldsymbol{i}$
(3,0)	$3\boldsymbol{j}$	(0,2)	$-2\boldsymbol{i}$
(1,1)	$-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$	(0,3)	$-3\boldsymbol{i}$
(2,2)	$2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$	(-1,1)	$-\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$



Nótese que los campos vectoriales **no** representan vectores de posición.



En la gráfica anterior se puede observar que los vectores dibujados presentan una tendencia, y es precisamente esa tendencia de los vectores la que se dibuja.

Los campos vectoriales se representan a través de líneas de campo.

Las líneas de campo son aquellas en las cuales los vectores de campo vectorial son tangentes.

> **Definición 2.3**
> Sea $\bar{\boldsymbol{F}}$ un campo vectorial. Una línea de campo o línea de flujo de $\bar{\boldsymbol{F}}$ es una trayectoria $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ tal que $\dfrac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt}$ es $\bar{\boldsymbol{F}}\left(\bar{\boldsymbol{r}}(t)\right)$.

Para el campo anterior, las líneas de campo son trayectorias que describen circunferencias concéntricas con centro en el origen y orientadas en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Es importante aclarar que las líneas de campo son líneas imaginarias, no existen en realidad, es decir, sólo ayudan a obtener una aproximación de la gráfica de un campo vectorial, y no son la función en si; sin embargo, para que las líneas de campo representen una función, no deben nunca tocarse ni cruzarse.

DOMINIO, LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES VECTORIALES

Antes del cálculo de límites, es necesario identificar la forma en la que se obtiene el dominio de una función vectorial. El dominio de una función vectorial, es la intersección de los dominios de cada una de las funciones escalares que la componen.

Ejemplo 2.2

Determinar el dominio de las siguientes funciones vectoriales de variable escalar.

a) $\bar{\boldsymbol{r}}(t) = \ln t \; \boldsymbol{i} + \dfrac{1}{t}\boldsymbol{j}$

b) $\bar{\boldsymbol{r}}(t) = \sqrt[3]{t}\;\boldsymbol{i} + e^{-t}\boldsymbol{j} + \operatorname{sen} 3t\;\boldsymbol{k}$

Resolución

a) Puesto que estudiamos funciones reales de variable real, la función logaritmo natural sólo está definida, en los números reales, para valores positivos, entonces:

$$\underline{\underline{D_{\bar{r}} = \{\, t \mid t > 0 \;;\; t \in \mathbb{R} \,\}}}$$

b) Puesto que las funciones escalares de las componentes tiene como dominio a todos los reales, entonces

$$\underline{\underline{D_{\bar{r}} = \{\, t \mid t \in \mathbb{R} \,\}}}$$

Ejemplo 2.3

Determinar el dominio de las siguientes funciones vectoriales de variable vectorial.

a) $\bar{\boldsymbol{F}}(x,y) = \dfrac{3xy}{x^2 + y^2}\boldsymbol{i} + (x^2 - 9y^2)^{-2}\boldsymbol{j}$

b) $\bar{\boldsymbol{F}}(x,y) = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\boldsymbol{i} + e^{\sqrt{xy+1}}\boldsymbol{j} + \dfrac{y^2}{y - x^2}\boldsymbol{k}$

Resolución

a) Si $f_1(x,y) = \dfrac{3xy}{x^2 + y^2}$, puesto que no está definida la división entre cero, se tiene

$$D_{f_1} = \{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0) \;;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Si $f_2(x,y) = (x^2 - 9y^2)^{-2} = \dfrac{1}{(x^2 - 9y^2)^2}$, entonces

$$D_{f_2} = \{(x,y) \mid x \neq \pm 3y \;;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Finalmente el dominio de $\bar{\boldsymbol{F}}$ es la intersección de los dominios de f_1 y f_2.

$$\underline{\underline{D_{\bar{F}} = D_{f_1} \cap D_{f_2} = \{(x,y) \mid x \neq \pm 3y \;;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}}}$$

b) Para la componente en $\boldsymbol{i}$:

$$D_{f_1} = \{(x,y) \mid x \geq 0,\; y \geq 0 \;;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

para la componente en $\boldsymbol{j}$:

$$D_{f_2} = \{ (x,y) \mid \; xy \geq -1 \;;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

para la componente en $\boldsymbol{k}$

$$D_{f_3} = \{ (x,y) \mid \; y \neq x^2 \;;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Finalmente: $D_{\bar{F}} = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3}$

$$= \{ (x,y) \mid \; x \geq 0,\; y \geq 0,\; y \neq x^2 \;;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Para la obtención de límites se analizarán primero las funciones vectoriales de variable escalar.

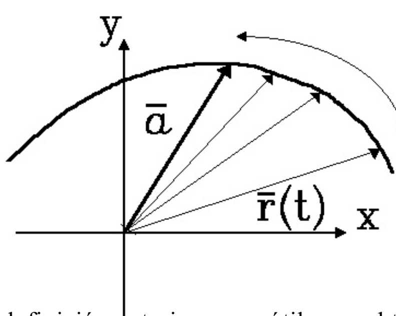
Definición 2.4

Sea $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ una función vectorial de variable escalar $\bar{\boldsymbol{r}} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, definida en un entorno del punto t_0, excepto posiblemente en t_0. Entonces $\bar{\boldsymbol{a}}$ es el vector límite de $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ cuando t se aproxima a t_0 y se expresa como

$$\lim_{t \to t_0} \bar{\boldsymbol{r}}(t) = \bar{\boldsymbol{a}}$$

Si y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que

$$\left| \bar{\boldsymbol{r}}(t) - \bar{\boldsymbol{a}} \right| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \left| t - t_0 \right| < \delta$$



Obsérvese que $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ tiende al vector $\bar{\boldsymbol{a}}$ en la medida en que t tiende a cierto valor t_0, y debe recordarse que no es necesario que la función vectorial esté definida en el instante o valor al que t se aproxima.

La definición anterior no es útil para obtener el límite, sólo sirve para comprobar si el vector $\bar{\boldsymbol{a}}$ corresponde al límite de $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ cuando t tiende a t_0. Para obtener límites de manera práctica es necesario establecer la siguiente definición.

Definición 2.5

Sea $\bar{\boldsymbol{r}} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una función vectorial tal que

$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) = f_1(t)\,\boldsymbol{i} + f_2(t)\,\boldsymbol{j} + f_3(t)\,\boldsymbol{k}$$

entonces

$$\lim_{t \to t_0} \bar{\boldsymbol{r}}(t) = \left[\lim_{t \to t_0} f_1(t) \right] \boldsymbol{i} + \left[\lim_{t \to t_0} f_2(t) \right] \boldsymbol{j} + \left[\lim_{t \to t_0} f_3(t) \right] \boldsymbol{k}$$

siempre y cuando los límites de las funciones $f_i \;\; i = 1,2,3$ existan cuando $t \to t_0$.

La definición anterior se presenta para funciones vectoriales $\bar{\boldsymbol{r}} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (en el espacio), pero es igualmente útil para funciones $\bar{\boldsymbol{r}} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (en el plano), considerando que no existe componente en la dirección $\boldsymbol{k}$, y puede generalizarse para funciones vectoriales $\bar{\boldsymbol{r}} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Como puede observarse, para que el límite de la función vectorial exista, debe existir el límite de cada una de las funciones escalares. Si no existe el límite de alguna función escalar, entonces no existe el límite de la función vectorial.

La definición de continuidad en un instante (o en un punto) para una función vectorial es similar a la definición de continuidad para funciones escalares.

Definición 2.6

Una función vectorial $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ es continua en $t = t_0$ si

$$\lim_{t \to t_0} \bar{\boldsymbol{r}}(t) = \bar{\boldsymbol{r}}(t_0)$$

Retomando la definición dada para el límite de una función vectorial puede concluirse que una función vectorial es continua en un valor si y sólo si, las funciones escalares de cada componente son continuas en ese mismo valor (instante).

Ejemplo 2.4

Obtener, si existe, el límite de las siguientes funciones vectoriales.

a) $\lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{\operatorname{sen} 2t}{t}\,\boldsymbol{i} + (t-5)^2\boldsymbol{j} + t\ln t\ \boldsymbol{k}\right]$

b) $\lim\limits_{t\to 0}\left[\sqrt{t}\ \boldsymbol{i} + (2t^2+3)\ \boldsymbol{j} + \dfrac{1-\cos t}{t}\ \boldsymbol{k}\right]$

Resolución

a) Puesto que se presentan indeterminaciones en las funciones de la primera y última componentes, se aplica la regla de L'Hopital, de la siguiente manera:

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{t}\,\boldsymbol{i} + (t-5)^2\boldsymbol{j} + t\ln t\ \boldsymbol{k}\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{t}\,\boldsymbol{i} + (t-5)^2\boldsymbol{j} + \frac{\ln t}{\frac{1}{t}}\ \boldsymbol{k}\right]$$

Aplicando la regla de L'Hopital

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{2\cos 2t}{1}\,\boldsymbol{i} + (t-5)^2\boldsymbol{j} + \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}\ \boldsymbol{k}\right] \underline{\underline{= 2\ \boldsymbol{i} + 25\ \boldsymbol{j} + 0\ \boldsymbol{k}}}$$

b) Para este límite también se aplica la regla de L'Hopital en la tercera componente.

$$\lim_{t\to 0}\left[\sqrt{t}\ \boldsymbol{i} + (2t^2+3)\ \boldsymbol{j} + \frac{1-\cos t}{t}\ \boldsymbol{k}\right]$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\sqrt{t}\ \boldsymbol{i} + (2t^2+3)\ \boldsymbol{j} + \frac{\operatorname{sen} t}{1}\ \boldsymbol{k}\right] \quad \underline{\underline{= 0\ \boldsymbol{i} + 0\ \boldsymbol{j} + 0\ \boldsymbol{k} = \bar{\boldsymbol{0}}}}$$

Ejemplo 2.5

Analizar la continuidad de la siguiente función vectorial

$$\bar{\boldsymbol{r}}(x) = \operatorname{ang\,sen}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \boldsymbol{i} + \operatorname{ang\,sen}\sqrt{1-x^2}\ \boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\sqrt{1-x^2}\ \boldsymbol{k}$$

Resolución

Para evaluar $\sqrt{1-x^2}$ que aparece en las tres componentes, se debe cumplir la condición $1-x^2 \geq 0$ o bien $x^2 \leq 1$.

Para la componente en $\boldsymbol{i}$, se tiene que es continua si $1-x^2 \geq 1$.

Para la componente en $\boldsymbol{j}$, la función es continua si $0 \leq 1-x^2 \leq 1$, y para la componente en $\boldsymbol{k}$, basta que se cumpla $1-x^2 \geq 0$.

Finalmente, la intersección de las condiciones anteriores se da cuando $1-x^2=1$ o bien, $x=0$.

Por lo que se concluye que la función sólo describe un punto.

Al igual que para las funciones escalares, también es posible definir funciones vectoriales utilizando más de una regla de correspondencia, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6

Sea la función $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2-1}{t-1}\ \boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j} & , \quad t \neq 1 \\ 2\ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} & , \quad t = 1 \end{cases}$

Determinar si la función $\bar{\boldsymbol{r}}$ es continua en $t=1$.

Resolución

$\bar{\boldsymbol{r}}$ es continua en $t=1$ si

$$\bar{\boldsymbol{r}}(1) = \lim_{t\to 1}\bar{\boldsymbol{r}}(t)$$

Por otro lado:

$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$$

$$\lim_{t\to 1} r(t) = \lim_{t\to 1}\left(\frac{t^2-1}{t-1}\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j}\right)$$

$$= \left(\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t-1}\right)\boldsymbol{i} + \left(\lim_{t\to 1} t^3\right)\boldsymbol{j}$$

$$= 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \quad \Rightarrow \quad \bar{\boldsymbol{r}} \ \underline{\underline{\text{es continua en } t=1}}$$

Ahora se analizarán las funciones vectoriales de variable vectorial.

Supóngase que se tiene una función $\bar{F}$ de n variables y recorrido en m dimensiones $\bar{F}: A \subset R^n \to R^m$

$$\bar{F}(\bar{x}) = f_1(\bar{x})\hat{e}_1 + f_2(\bar{x})\hat{e}_2 + \ . \ . \ . + f_m(\bar{x})\hat{e}_m$$

donde $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \ . \ . \ . \ , x_n)$, $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0$ para $i \neq j$ y $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i = 1$ para toda i ,

entonces, se tienen las siguientes definiciones :

Definición 2.7

Sea $\bar{F}(\bar{x})$ una función vectorial de variable vectorial $\bar{F}: A \subset R^n \to R^m$, definida en un entorno del punto $\bar{x}_0$,excepto posiblemente en $\bar{x}_0$.

Entonces $\bar{L}$ es el límite de $\bar{F}(\bar{x})$ cuando $\bar{x}$ se aproxima a $\bar{x}_0$ y se expresa como

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \bar{F}(\bar{x}) = \bar{L}$$

Si y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que

$|\bar{F}(\bar{x}) - \bar{L}| < \epsilon$ siempre que

$0 < |\bar{x} - \bar{x}_0| < \delta$

Al igual que en el caso de límite de una función vectorial de variable escalar, la definición formal de límite para una función vectorial de variable vectorial no proporciona dicho límite, por lo que se establece la siguiente definición.

Definición 2.8

Sea $\bar{F}: A \subset R^2 \to R^3$ una función vectorial tal que

$$\bar{F}(x,y) = f_1(x,y)\,\boldsymbol{i} + f_2(x,y)\,\boldsymbol{j} + f_3(x,y)\,\boldsymbol{k}$$

entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \bar{F}(x,y) = \left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_1(x,y)\right]\boldsymbol{i} + \left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_2(x,y)\right]\boldsymbol{j} + \left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_3(x,y)\right]\boldsymbol{k}$$

siempre y cuando los límites de las funciones f_i $i = 1,2,3$ existan cuando $(x,y) \to (x_0,y_0)$.

La definición anterior es un caso particular para funciones $\bar{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, pero puede generalizarse para funciones $\bar{F}: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Con respecto a la continuidad, se establece la siguiente definición.

Definición 2.9

Una función $\bar{F}(\bar{x})$ es continua en $\bar{x} = \bar{x}_0$ si

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \bar{F}(\bar{x}) = \bar{F}(\bar{x}_0)$$

Ejemplo 2.7

Determinar, si existe, el límite de la siguiente función vectorial cuando (x,y) tiende a $(0,0)$

$$\bar{F}(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\boldsymbol{i} + \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\,\boldsymbol{j} + \frac{x y^2}{x^2+y^2}\,\boldsymbol{k}$$

Resolución

Calculando el límite de cada una de las funciones escalares se tiene:

Para la primera componente:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$ haciendo un cambio de variable $(x^2 + y^2 = u)$

$$\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1 \text{ por lo que } \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

Para la segunda componente:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, utilizando límites reiterados

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{y^3}{y^2} = \lim_{y\to 0} y = 0$$

Por lo que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, si existe , es 0 (cero).

Para la tercera componente:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$, igualmente utilizando límites reiterados

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x(0)}{x^2+0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Por lo que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$, si existe , es 0 (cero).

Finalmente, el límite de la función vectorial , si existe es

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\bar{\boldsymbol{F}}(x,y) = \boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$$

DERIVACIÓN DE FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE ESCALAR

Para el caso de una función $\bar{\boldsymbol{r}}: A\subset \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.10

Sea $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(t)$ una función vectorial de variable escalar. Entonces la derivada de $\bar{\boldsymbol{r}}$ se define como:

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\,\bar{\boldsymbol{r}}(t+\Delta t) - \bar{\boldsymbol{r}}(t)\,\right]$$

siempre y cuando el límite exista.

Puesto que $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ es una función de una sola variable, entonces la derivada, es una derivada ordinaria.

En forma práctica, la derivada de una función vectorial se obtiene al derivar cada una de las funciones escalares que la componen. La derivada de $\bar{\boldsymbol{r}}$ con respecto de t , $\dfrac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt}$ también puede denotarse $\bar{\boldsymbol{r}}'(t)$ o bien utilizando la notación de Newton $\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR DE FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE ESCALAR

Al ser otra función la derivada ordinaria de una función vectorial, es susceptible de volverse a derivar, lo que da origen a las derivadas de orden superior.

Por ejemplo, para una función $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(t)$, su derivada es $\dfrac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt}$, y su segunda derivada es $\dfrac{d^2\bar{\boldsymbol{r}}}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt}\right]$, en general, la n-ésima derivada de $\bar{\boldsymbol{r}}$ es:

$$\boxed{\frac{d^n\bar{\boldsymbol{r}}}{dt^n} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d^{n-1}\bar{\boldsymbol{r}}}{dt^{n-1}}\right]}$$

FÓRMULAS ESPECIALES DE DERIVACIÓN

Sean $\bar{\boldsymbol{r}}_1(t)$, $\bar{\boldsymbol{r}}_2(t)$ y $\bar{\boldsymbol{r}}_3(t)$ funciones vectoriales derivables y $f(t)$ una función escalar derivable, entonces

a) $\frac{d}{dt}\left[\,\bar{\boldsymbol{r}}_1(t) + \bar{\boldsymbol{r}}_2(t)\,\right] = \bar{\boldsymbol{r}}_1'(t) + \bar{\boldsymbol{r}}_2'(t)$

b) $\frac{d}{dt}\left[f(t)\ \bar{\boldsymbol{r}}_1(t)\right] = f(t)\,\bar{\boldsymbol{r}}_1'(t) + f'(t)\,\bar{\boldsymbol{r}}_1(t)$

c) $\frac{d}{dt}\left[\,\bar{\boldsymbol{r}}_1(t)\cdot\bar{\boldsymbol{r}}_2(t)\right] = \bar{\boldsymbol{r}}_1(t)\cdot\bar{\boldsymbol{r}}_2'(t) + \bar{\boldsymbol{r}}_1'(t)\cdot\bar{\boldsymbol{r}}_2(t)$

d) $\frac{d}{dt}\left[\,\bar{\boldsymbol{r}}_1(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}_2(t)\right] = \bar{\boldsymbol{r}}_1(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}_2'(t) + \bar{\boldsymbol{r}}_1'(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}_2(t)$

e) $\frac{d}{dt}\left[\,(\bar{\boldsymbol{r}}_1(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}_2(t))\times\bar{\boldsymbol{r}}_3(t)\,\right] = (\,\bar{\boldsymbol{r}}_1(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}_2(t)\,)\times\bar{\boldsymbol{r}}_3'(t) +$

$+ (\,\bar{\boldsymbol{r}}_1(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}_2'(t)\,)\times\bar{\boldsymbol{r}}_3(t) + (\,\bar{\boldsymbol{r}}_1'(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}_2(t)\,)\times\bar{\boldsymbol{r}}_3(t)$

f) $\frac{d}{dt}\left[\,\bar{\boldsymbol{r}}_1(t)\cdot\bar{\boldsymbol{r}}_2(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}_3(t)\right] = \bar{\boldsymbol{r}}_1(t)\cdot\bar{\boldsymbol{r}}_2(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}_3'(t) +$

$+ \bar{\boldsymbol{r}}_1(t)\cdot\bar{\boldsymbol{r}}_2'(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}_3(t) + \bar{\boldsymbol{r}}_1'(t)\cdot\bar{\boldsymbol{r}}_2(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}_3(t)$

Dado que el producto vectorial (producto cruz) de dos vectores no es conmutativo, el orden en el que aparecen $\bar{\boldsymbol{r}}_1$, $\bar{\boldsymbol{r}}_2$ y $\bar{\boldsymbol{r}}_3$ en los incisos d), e) y f) debe respetarse.

Ejemplo 2.8

Utilizar las fórmulas especiales de derivación para obtener las siguientes derivadas.

a) $\frac{d}{dt}[\bar{\boldsymbol{r}}(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}'(t)]$ b) $\frac{d}{dt}\left[\bar{\boldsymbol{r}}_1(2t) + \bar{\boldsymbol{r}}_2\left(\frac{1}{t}\right)\right]$

Resolución

a) $\frac{d}{dt}\left[\bar{\boldsymbol{r}}(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}'(t)\right] = \bar{\boldsymbol{r}}(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}''(t) + \bar{\boldsymbol{r}}'(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}'(t)$

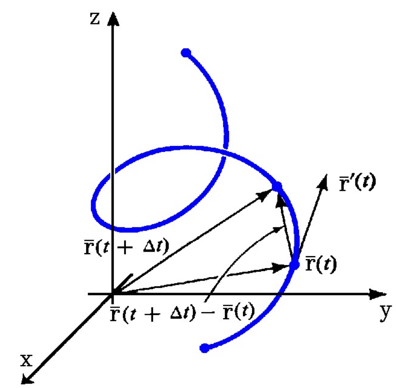
y puesto que $\bar{\boldsymbol{r}}'(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}'(t) = 0 \quad\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}[\bar{\boldsymbol{r}}(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}'(t)] = \bar{\boldsymbol{r}}(t)\times\bar{\boldsymbol{r}}''(t)$$

b) $$\frac{d}{dt}\left[\bar{\boldsymbol{r}}_1(2t) + \bar{\boldsymbol{r}}_2\left(\frac{1}{t}\right)\right] = 2\bar{\boldsymbol{r}}_1'(2t) - \frac{1}{t^2}\,\bar{\boldsymbol{r}}_2'\left(\frac{1}{t}\right)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE $\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt}$

La derivada de una función vectorial de variable escalar $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(t)$ representa, geométricamente, un vector tangente a la curva descrita por $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$.

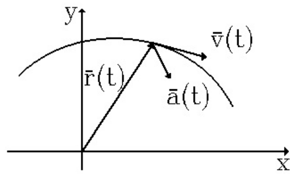


INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LAS DERIVADAS $\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt}$ Y $\frac{d^2\bar{\boldsymbol{r}}}{dt^2}$

Si $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ representa la posición de una partícula en el instante de tiempo t, entonces, la variación de la posición con respecto del tiempo en un instante $\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt}$, es la *velocidad instantánea* de la partícula y se denota $\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{v}}(t)$. De la misma forma, la variación de la velocidad con respecto del tiempo en un instante es la *aceleración instantánea* de la partícula y se denota por $\bar{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{a}}(t)$. Es muy común que al derivar una función con respecto del tiempo se utilice la notación de Newton, por lo que

$$\bar{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt} = \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}(t)$$

$$\bar{\boldsymbol{a}}(t) = \frac{d\bar{\boldsymbol{v}}}{dt} = \frac{d^2\bar{\boldsymbol{r}}}{dt^2} = \ddot{\bar{\boldsymbol{r}}}(t)$$



Por otro lado al módulo de la velocidad instantánea $|\bar{\boldsymbol{v}}(t)|$ se le llama rapidez, y se denota por $v(t)$.

Ejemplo 2.9

Obtener $\bar{\boldsymbol{r}}'(t)$ y $\bar{\boldsymbol{r}}''(t)$ para las siguientes funciones vectoriales

a) $\bar{\boldsymbol{r}}(t) = \dfrac{1}{t}\boldsymbol{i} + \ln t\,\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$

b) $\bar{\boldsymbol{r}}(t) = (t + \cos t)\boldsymbol{i} + (t\cos t - \operatorname{sen} t)\boldsymbol{j} + (t e^{2t})\boldsymbol{k}$

Resolución

a) Puesto que $\bar{\boldsymbol{r}}'(t) = \dfrac{d\bar{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} = \left[\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{t}\right)\right]\boldsymbol{i} + \left[\dfrac{d}{dt}(\ln t)\right]\boldsymbol{j} + \left[\dfrac{d}{dt}(t^2)\right]\boldsymbol{k}$

se tiene $\quad \underline{\underline{\bar{\boldsymbol{r}}'(t) = -\dfrac{1}{t^2}\boldsymbol{i} + \dfrac{1}{t}\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}}}$

derivando nuevamente

$$\bar{\boldsymbol{r}}''(t) = \frac{d^2\bar{\boldsymbol{r}}(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}(t)}{dt}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{t^3}\boldsymbol{i} - \frac{1}{t^2}\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}}}$$

b) $\bar{\boldsymbol{r}}'(t) = (1 - \operatorname{sen} t)\boldsymbol{i} + (-t\operatorname{sen} t + \cos t - \cos t)\boldsymbol{j} + (2te^{2t} + e^{2t})\boldsymbol{k}$

simplificando

$\underline{\underline{\bar{\boldsymbol{r}}'(t) = (1 - \operatorname{sen} t)\boldsymbol{i} - (t\operatorname{sen} t)\boldsymbol{j} + (2te^{2t} + e^{2t})\boldsymbol{k}}}$

derivando nuevamente

$\underline{\underline{\bar{\boldsymbol{r}}''(t) = (-\cos t)\boldsymbol{i} - (t\cos t + \operatorname{sen} t)\boldsymbol{j} + (4te^{2t} + 4e^{2t})\boldsymbol{k}}}$

Ejemplo 2.10

Si la trayectoria de una partícula está descrita por la función

$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) = t\,\boldsymbol{i} + 3t\,\boldsymbol{j} + t^2\,\boldsymbol{k}$$

donde $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ es la posición de la partícula en el instante t. Determinar el vector tangente unitario a la curva descrita por la partícula en el instante $t = 1$.

Resolución

El vector tangente a la trayectoria en cualquier instante es:

$$\bar{\boldsymbol{r}}'(t) = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$$

y en el instante $t = 1$

$$\bar{\boldsymbol{r}}'(1) = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

Sea $\bar{\boldsymbol{T}}$ el vector tangente unitario, entonces

$\bar{\boldsymbol{T}} = \dfrac{1}{|\bar{\boldsymbol{r}}'(1)|}\bar{\boldsymbol{r}}'(1)$ sustituyendo $\underline{\underline{\bar{\boldsymbol{T}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})}}$

Ejemplo 2.11

Para la función vectorial $\bar{\boldsymbol{r}}(t) = 4t\,\boldsymbol{i} + 3\cos t\,\boldsymbol{j} + 3\operatorname{sen} t\,\boldsymbol{k}$; $t \geq 0$, que representa la posición de una partícula en función del tiempo. Determinar la velocidad, la rapidez y la aceleración, en cualquier instante.

Resolución

De la función de posición

$\bar{\boldsymbol{r}}(t) = 4t\,\boldsymbol{i} + 3\cos t\,\boldsymbol{j} + 3\operatorname{sen} t\,\boldsymbol{k}$

se obtiene la velocidad instantánea

$\underline{\underline{\bar{\boldsymbol{v}}(t) = \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}(t) = 4\,\boldsymbol{i} - 3\operatorname{sen} t\,\boldsymbol{j} + 3\cos t\,\boldsymbol{k}}}$

Puesto que la rapidez es el módulo de la velocidad instantánea

Rapidez = $|\bar{\boldsymbol{v}}(t)| = \sqrt{16 + 9\operatorname{sen}^2 t + 9\cos^2 t}$ $\quad \underline{\underline{|\bar{\boldsymbol{v}}(t)| = 5}}$

Por último, la aceleración instantánea es la derivada de la velocidad con respecto del tiempo.

$$\underline{\underline{\bar{\boldsymbol{a}}(t) = \dot{\bar{\boldsymbol{v}}}(t) = -3\cos t\,\boldsymbol{j} - 3\operatorname{sen} t\,\boldsymbol{k}}}$$

Al igual que para las funciones escalares, es posible obtener la diferencial de una función vectorial, y para el caso en el que la variable es escalar, a la diferencial se le llama *diferencial ordinaria*.

DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL DE VARIABLE ESCALAR

Definición 2.11

Una función $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(t) = f_1(t)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + f_2(t)\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \ldots + f_n(t)\hat{\boldsymbol{e}}_n$ es diferenciable en cualquier valor de t si y sólo si, su incremento puede escribirse como:

$$\Delta\bar{\boldsymbol{r}} = [f_1'(t)\,\Delta t + \eta_1\,\Delta t\,]\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + [f_2'(t)\,\Delta t + \eta_2\,\Delta t\,]\,\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \ldots + [f_n'(t)\,\Delta t + \eta_n\,\Delta t\,]\,\hat{\boldsymbol{e}}_n$$

donde $\eta_i \to 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n$ cuando $\Delta t \to 0$.

La definición anterior representa la condición de diferenciabilidad de una función vectorial de variable escalar, puesto que cada componente de $\bar{\boldsymbol{r}}$ es una función escalar es posible afirmar que, para que una función $\bar{\boldsymbol{r}} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sea diferenciable, es condición necesaria y suficiente el hecho de que sea derivable.

Definición 2.12

Se llama diferencial ordinaria, o simplemente diferencial, de una función vectorial

$\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(t) = f_1(t)\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + f_2(t)\,\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \ldots + f_n(t)\hat{\boldsymbol{e}}_n$ a la expresión

$$d\bar{\boldsymbol{r}} = f_1'(t)\,dt\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + f_2'(t)\,dt\,\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \ldots + f_n'(t)\,dt\,\hat{\boldsymbol{e}}_n$$

o bien

$$d\bar{\boldsymbol{r}} = \left[\,f_1'(t)\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + f_2'(t)\,\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \ldots + f_n'(t)\,\hat{\boldsymbol{e}}_n\,\right]dt$$

En la última expresión la parte entre paréntesis es la derivada de $\bar{\boldsymbol{r}}$, por lo que la diferencial puede escribirse como:

$$\boxed{d\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}'(t)\,dt}$$

Ejemplo 2.12

Sea la función vectorial

$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) = 3t^2\,\boldsymbol{i} + (t - e^{t})\,\boldsymbol{j} + sen\,t\,\boldsymbol{k}$$

obtener $d\bar{\boldsymbol{r}}$

Resolución

$$d\bar{\boldsymbol{r}}(t) = 6t\;dt\;\boldsymbol{i} + (1 - e^{t})\;dt\;\boldsymbol{j} + \cos t\;dt\;\boldsymbol{k}$$

o bien

$$d\bar{\boldsymbol{r}}(t) = [\;6t\;\boldsymbol{i} + (1 - e^{t})\,\boldsymbol{j} + \cos t\;\boldsymbol{k}\;]\;dt$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE ESCALAR

Definición 2.13

Sea $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(t) = f_1(t)\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + f_2(t)\,\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \ldots + f_n(t)\hat{\boldsymbol{e}}_n$ una función vectorial, y si $f_i \quad i = 1,2,\ldots,n$, son funciones continuas en el intervalo $[a,b]$, entonces:

La integral indefinida de $\bar{\boldsymbol{r}}$ es

$$\int \bar{\boldsymbol{r}}(t)\,dt = \left[\int f_1(t)\,dt\right]\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \left[\int f_2(t)\,dt\right]\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \ldots + \left[\int f_n(t)\,dt\right]\hat{\boldsymbol{e}}_n$$

Y la integral definida de $\bar{\boldsymbol{r}}$ en el intervalo $a \le t \le b$ es

$$\int_a^b \bar{\boldsymbol{r}}(t)\,dt = \left[\int_a^b f_1(t)\,dt\right]\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \left[\int_a^b f_2(t)\,dt\right]\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \ldots + \left[\int_a^b f_n(t)\,dt\right]\hat{\boldsymbol{e}}_n$$

Es importante observar que al realizar la integral indefinida de la función $\bar{\boldsymbol{r}}$, se debe agregar un vector constante de integración $\bar{\boldsymbol{C}}$, producto de la constante de integración de cada una de las funciones escalares de las componentes de la función vectorial. Por lo que $\bar{\boldsymbol{C}} = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$.

Ejemplo 2.13

Un jugador de béisbol lanza una pelota con un ángulo con respecto a la horizontal de 45°, a una distancia de 75 m. Si la pelota es capturada al mismo nivel del lanzamiento, determinar la rapidez inicial del lanzamiento. (Ayuda: $\bar{\boldsymbol{a}}(t) = -9.81\,\boldsymbol{j}$ m/s^2)

Resolución

Partiendo de: $\bar{\boldsymbol{a}}(t) = -9.81\,\boldsymbol{j}$

$$\bar{\boldsymbol{v}}(t) = \int \bar{\boldsymbol{a}}(t)\,dt = v_{ox}\,\boldsymbol{i} + (v_{oy} - 9.81\,t)\,\boldsymbol{j}$$

donde v_{ox} es la componente de la velocidad inicial en la dirección de x, y v_{oy} es la componente en dirección de y, es decir $\bar{\boldsymbol{v}}_o = (v_{ox}, v_{oy})$.

$$v_{ox} = v_o\cos\theta = v_o\cos 45° = \frac{v_o}{\sqrt{2}} \qquad , \qquad v_{oy} = v_o\,\text{sen}\,\theta = v_0\,\text{sen}\,45° = \frac{v_o}{\sqrt{2}}$$

sustituyendo en $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ e integrando

$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) = \int \bar{\boldsymbol{v}}(t)\,dt = \frac{v_o}{\sqrt{2}}\,t\,\boldsymbol{i} + \left(\frac{v_o}{\sqrt{2}}\,t - 4.905\,t^2\right)\boldsymbol{j}$$

Para esta integral, el vector constante de integración es $\bar{\boldsymbol{0}}$, puesto que se considera como origen del lanzamiento el origen del sistema coordenado.

En el momento que cae la pelota

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_o}{\sqrt{2}}\,t - 4.905\,t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0, \qquad t_2 = \frac{v_o}{\sqrt{2}\;4.905}$$

t_1 se descarta, puesto que es el instante del lanzamiento.

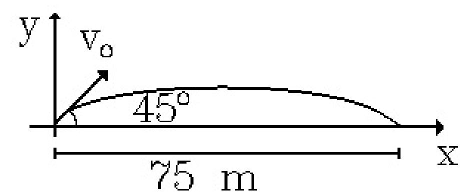
Sustituyendo t_2 en $x = 75 = \dfrac{v_0}{\sqrt{2}}\,t$

$$75 = \frac{v_o}{\sqrt{2}}\;\frac{v_o}{\sqrt{2}\;4.905} = \frac{v_o^2}{9.81}$$

$$v_o = \sqrt{(75)(9.81)}$$

Finalmente la rapidez inicial es:

$$\underline{\underline{v_o = 27.12 \left[\frac{m}{s}\right]}}$$



Ejemplo 2.14

Un proyectil es disparado a una altura de 10 m, con una velocidad inicial de 1500 m/s y con un ángulo de elevación de 30° .

Determinar:

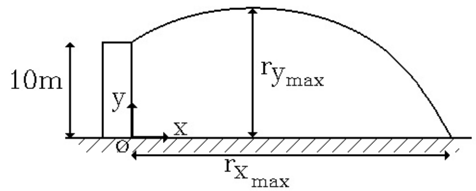
a) La velocidad en cualquier instante

b) La altura máxima

c) El alcance del proyectil

d) La rapidez con la que el proyectil choca con el suelo.

Resolución



La aceleración en cualquier instante está dada por

$\bar{\boldsymbol{a}}(t) = -9.81\ \boldsymbol{j}$ (aceleración de la gravedad)

de donde:

$$\bar{\boldsymbol{v}}(t) = \int \bar{\boldsymbol{a}}(t)\,dt = 1500\cos 30°\ \boldsymbol{i} + (1500\,sen 30° - 9.81\,t)\,\boldsymbol{j}$$

$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) = \int \bar{\boldsymbol{v}}(t)\,dt = \frac{\sqrt{3}}{2}1500\,t\ \boldsymbol{i} + (10 + 750t - 4.905t^2)\,\boldsymbol{j}$$

a) $\underline{\underline{\bar{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}1500\ \boldsymbol{i} + (750 - 9.81t)\,\boldsymbol{j}}}$

b) La altura máxima es cuando r_y es máxima

$$r_y = 10 + 750t - 4.905t^2$$

maximizando $r_y' = 750 - 9.81t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 76.4$

sustituyendo en r_y se tiene $\underline{\underline{r_y(t = 76.4) = 5457.24\,m}}$

c) El alcance máximo se tiene cuando $r_y = 0$

$r_y = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -0.0133$ se descarta por ser un valor negativo (el tiro parabólico inicia en $t = 0$).

$t_2 = 152.9185$

finalmente:

$$\underline{\underline{r_x(t = 152.9185) = 198646.9987\ [m]}}$$

d) $\bar{\boldsymbol{v}}(t = 152.9185) = 1299.038\ \boldsymbol{i} - 750.13\ \boldsymbol{j}$

La rapidez es: $\underline{\underline{|\bar{\boldsymbol{v}}| = 1500.065\ \left[\frac{m}{s}\right]}}$

Ejemplo 2.15

Una bala es disparada por un rifle con una velocidad inicial de 1200 metros por segundo, y debe dar en un blanco a 3000 metros de distancia. Despreciando la resistencia del aire, determinar el ángulo mínimo de elevación del rifle.

Ayuda : Utilizar las ecuaciones de tiro parabólico.

Resolución

De la ecuación de posición para un tiro parabólico

$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) = (x_0 + v_{0x}\,t)\,\boldsymbol{i} + \left(y_0 + v_{0y}\,t - \frac{1}{2}gt^2\right)\boldsymbol{j}$$

Si el origen está en la boca del rifle $\bar{\boldsymbol{r}}_0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$

y puesto que $v_{0x} = v_0 \cos\theta$

$v_{0y} = v_0\ \text{sen}\,\theta$

donde $v_0 = |\bar{\boldsymbol{v}}_0| = 1200\ \left[\frac{m}{s}\right]$

y considerando $g = 9.81\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$ se tiene que :

$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) = v_0\,t\cos\theta\ \boldsymbol{i} + (v_0\,\text{sen}\,\theta - 4.905\,t^2)\,\boldsymbol{j}$$

de donde las ecuaciones paramétricas son:

$r_x = v_0\,t\cos\theta$ y $r_y = v_0\,t\ \text{sen}\,\theta - 4.905\,t^2$

cuando la bala da en el blanco $v_y = 0$, por lo que

$v_0\,t\ \text{sen}\,\theta - 4.905\,t^2 = 0 \qquad t_1 = 0$ se descarta

$v_0\ \text{sen}\,\theta - 4.905\,t = 0$

$$t^2 = \frac{v_0\ \text{sen}\,\theta}{4.905} \qquad \text{. . . (a)}$$

cuando da en el blanco también se cumple que $r_x = 3000$ por lo que

$$3000 = v_0\,t\cos\theta \qquad \text{. . . (b)}$$

sustituyendo (a) en (b)

$$3000 = v_0\left(\frac{v_0\ \text{sen}\,\theta}{4.905}\right)\cos\theta$$

$$3000 = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{4.905}$$

utilizando la identidad trigonométrica $\dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} = \operatorname{sen}\theta \cos\theta$

$$3000 = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2(4.905)}$$

puesto que $v_0 = 1200 \left[\frac{m}{s}\right]$, entonces $3000 = \dfrac{(1200)^2 \operatorname{sen} 2\theta}{9.81}$

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{9.81(3000)}{(1200)^2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 2\theta = 0.0204375$$

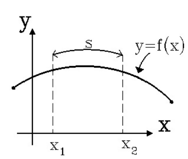
$$\theta = \frac{\text{ang sen } 0.0204375}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 0.5855°$$

finalmente $\theta = 35'\,7.92''$

LONGITUD DE ARCO

En CII se estudió la longitud de arco s de una función de la forma $y = f(x)$, y la expresión para obtener s.

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$



Ahora, para una curva expresada en forma vectorial $\bar{r} = \bar{r}(t)$, la longitud de arco s en un intervalo $[a, b]$, está definida como se indica a continuación.

Definición 2.14

La longitud de arco s de una curva en el intervalo $t \in [a, b]$ es

$$s = \int_a^b \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt$$

o bien

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

si $\bar{r}$ va de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^3$.

El obtener la expresión

$$s = \int_a^b \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt \qquad \ldots (1)$$

a partir de

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \ldots (2)$$

es bastante simple, como se muestra a continuación.

Dada una curva $y = f(x)$, se puede expresar en forma paramétrica como

$$x = x(t)$$
$$y = y(t) \qquad \ldots (3)$$

y a su vez, expresarse en forma vectorial como:

$$\bar{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \qquad \ldots (4)$$

Obteniendo $\dfrac{dy}{dx}$ a partir de (3) (derivada de función en forma paramétrica)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \qquad \ldots (5)$$

sustituyendo (5) en (2)

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right)^2}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{dy}{dt} \right)^2}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2}}\, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2}}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}}{\frac{dx}{dt}}\, dx$$

$$s = \int_{a}^{b} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}\, dt \qquad \ldots (6)$$

Los límites de integración se modifican puesto que ahora se integra con respecto de t, y no con respecto de x.

Finalmente si se deriva (4)

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} \qquad \ldots (7)$$

y se obtiene el módulo $\quad \left| \frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} \qquad \ldots (8)$

sustituyendo (7) en (5) $\quad s = \int_a^b \left| \frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| dt$

que es la expresión que se deseaba obtener.

■

Ejemplo 2.16

Obtener la longitud de arco s, de la función $\bar{\boldsymbol{r}}(t) = (1+4t)\boldsymbol{i} + (3+3t)\boldsymbol{j}$ si $t \in [1,3]$.

Resolución

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}\, dt \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = 4 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 3$$

sustituyendo

$$s = \int_1^3 \sqrt{16+9}\, dt = \int_1^3 5\, dt = 5t \,\Big|_1^3$$

$s = 15 - 5 = 10 \Rightarrow \underline{\underline{s = 10}}$ unidades de longitud.

Para este ejemplo, la función $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ es una recta en el plano de la cual se puede obtener su ecuación cartesiana, para ello, se obtienen primero sus ecuaciones paramétricas $x = 1+4t$, $y = 3+3t$.

Despejando t de ambas ecuaciones e igualando

$$t = \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{3} \Rightarrow 3x - 3 = 4y - 12$$

$$y = \frac{3x - 3 + 12}{4}$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

Cuando $\quad t = 1 \Rightarrow x = 5 \quad , \quad y = 6$

$\qquad\qquad t = 3 \Rightarrow x = 13 \quad , \quad y = 12$

$\therefore$ la distancia entre los puntos $(5,6)$ y $(13,12)$ es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(13-5)^2 + (12-6)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64+36}$$

$$d = \sqrt{100} = 10$$

Por ser una recta $\underline{\underline{s = d = 10}}$ unidades de longitud.

Ejemplo 2.17

Obtener la expresión general de la longitud de arco $s = s(t)$ de la curva cuya ecuación vectorial es:

$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) = (t - \text{sen}\,t)\,\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\,\boldsymbol{j} + \left(4\,sen\,\tfrac{1}{2}t\right)\boldsymbol{k}$$

Resolución

$$x = t - \text{sen}\,t \qquad \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$$

$$y = 1 - \cos t \qquad \frac{dy}{dt} = \text{sen}\,t$$

$$z = 4\,\text{sen}\frac{1}{2}t \qquad \frac{dz}{dt} = 2\cos\frac{1}{2}t$$

Sustituyendo en la expresión:

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

y considerando que $s = 0$ cuando $t = 0$ se tiene:

$$s = \int_0^t \sqrt{(1 - \cos\tau)^2 + (\text{sen}\,\tau)^2 + \left(2\cos\frac{1}{2}\tau\right)^2}\, d\tau$$

$$s = \int_0^t \sqrt{1 - 2\cos\tau + \cos^2\tau + \text{sen}^2\tau + 2\left(2\cos^2\frac{1}{2}\tau\right)}\, d\tau$$

dado que: $2\cos^2\frac{1}{2}\tau = 1 + \cos\tau$ y $\cos^2\tau + \text{sen}^2\tau = 1$

$$s = \int_0^t \sqrt{1 - 2\cos\tau + 1 + 2(1 + \cos\tau)}\, d\tau$$

$$s = \int_0^t \sqrt{4}\, d\tau = \int_0^t 2\, d\tau = 2t$$

finalmente $\underline{\underline{s = s(t) = 2t}}$

Obsérvese que para realizar la integración de *0* a t se utilizó en el integrando la variable muda τ .

Ejemplo 2.18

Sea la función vectorial $\bar{r}(t) = e^t\cos t\ \boldsymbol{i} + e^t\text{sen}\,t\ \boldsymbol{j}$

a) Obtener la longitud de arco de la curva entre $t = 0$ y $t = 1$.

b) Cambiar el parámetro t por el parámetro s , y obtener $\bar{r} = \bar{r}(s)$.

Resolución

a) $\bar{r}(t) = e^t\cos t\ \boldsymbol{i} + e^t\text{sen}\,t\ \boldsymbol{j}$

$\bar{r}'(t) = (-e^t\text{sen}\,t + e^t\cos t)\ \boldsymbol{i} + (e^t\cos t + e^t\text{sen}\,t)\ \boldsymbol{j}$

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

sustituyendo

$$s = \int_0^1 \sqrt{(-e^t\text{sen}\,t + e^t\cos t)^2 + (e^t\cos t + e^t\text{sen}\,t)^2}\, dt$$

operando

$$s = \int_0^1 [e^{2t}\text{sen}^2 t - 2e^{2t}\text{sen}\,t\cos t + e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\cos^2 t + 2e^{2t}\cos t\,\text{sen}\,t + e^{2t}\text{sen}^2 t]^{\frac{1}{2}}\, dt$$

simplificando:

$$s = \int_0^1 [2e^{2t}(sen^2 t + \cos^2 t)]^{\frac{1}{2}}\, dt = \int_0^1 \sqrt{2}e^t\, dt = \sqrt{2}e^t\Big]_0^1$$

finalmente

$$\underline{\underline{s = \sqrt{2}(e - 1)}}$$

b) Para cambiar el parámetro, es necesario obtener primero la expresión general que relaciona la longitud de arco y el tiempo, para ello:

$$s = \int_0^t \left|\frac{d\bar{r}(\tau)}{d\tau}\right| d\tau \quad \Rightarrow \quad s = \int_0^t \sqrt{2}e^\tau\, d\tau = \sqrt{2}(e^t - 1)$$

$$s = \sqrt{2}(e^t - 1)$$

despejando t se tiene: $t = \ln\dfrac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Sustituyendo esta última expresión en $\bar{r}(t)$ se obtiene $\bar{r}(s)$

$$\bar{\boldsymbol{r}}(s) = e^{\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}\cos\left(\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\boldsymbol{i} + e^{\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}\operatorname{sen}\left(\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\boldsymbol{j}$$

finalmente

$$\bar{\boldsymbol{r}}(s) = \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cos\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{i} + \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{j}$$

El parámetro longitud de arco posee algunas ventajas sobre el parámetro t, supóngase que se tiene una función vectorial

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(t)$$

y se quiere obtener un vector tangente unitario a dicha curva, entonces utilizando la interpretación geométrica de la derivada de una función vectorial se tiene

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{\left|\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt}\right|}\,\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt}$$

$\bar{\boldsymbol{T}} = \dfrac{\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt}\right|}$ representa un vector tangente unitario a la curva $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(t)$.

Por otro lado, considerando la expresión de la longitud de arco

$$s = \int_a^b \left|\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt}\right| dt$$

y con base en el teorema fundamental del cálculo integral $f(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$

se tiene $\qquad \dfrac{ds}{dt} = \left|\dfrac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt}\right|$

Y puesto que $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt}\right| = \frac{|\,d\bar{\boldsymbol{r}}\,|}{|\,dt\,|} = \frac{|\,d\bar{\boldsymbol{r}}\,|}{dt}$$

finalmente $\qquad \boxed{ds = |\,d\bar{\boldsymbol{r}}\,|}$

Entonces, si la función vectorial tiene como parámetro la longitud de arco s, es decir

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(s)$$

la derivada de $\bar{\boldsymbol{r}}(s)$, $\dfrac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{ds}$, es un vector tangente a la curva $\bar{\boldsymbol{r}}(s)$ pero tiene una característica adicional

$$\left|\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{ds}\right| = \frac{|d\bar{\boldsymbol{r}}|}{ds} = \frac{ds}{ds} = 1$$

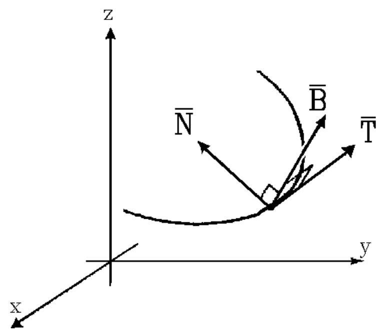
El vector $\dfrac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{ds}$ es de módulo unitario, es decir $\boxed{\left|\dfrac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{ds}\right| = 1}$

Las ventajas de expresar una curva a través del parámetro longitud de arco se estudian con mayor detenimiento al definir las fórmulas de Frenet-Serret. Pero su principal utilidad está en el hecho de que la parametrización a través de la longitud de arco es única, mientras que existen infinidad de parametrizaciones de una curva para t.

TRIEDRO MÓVIL Y FÓRMULAS DE FRENET-SERRET

Los matemáticos franceses Jean Fréderic Frenet (1816-1900) y Joseph Alfred Serret (1819-1885) desarrollaron unas fórmulas con las cuales se describe el movimiento de una partícula en el espacio. En esta sección se estudiarán las fórmulas que describen la variación del triedro móvil, formado por los vectores unitarios tangente, normal y binormal,, que actualmente se conocen como: *Fórmulas de Frenet-Serret*

TRIEDRO MÓVIL



Donde:

$\boldsymbol{\bar{T}}$ vector tangente unitario.

$\boldsymbol{\bar{N}}$ vector normal unitario.

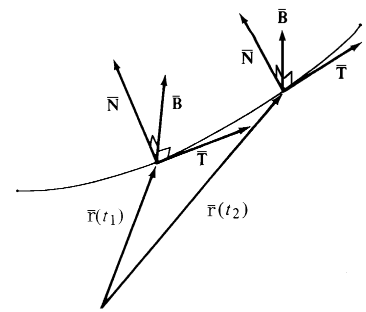
$\boldsymbol{\bar{B}}$ vector binormal unitario.

El vector unitario tangente $\boldsymbol{\bar{T}}$, el vector unitario normal $\boldsymbol{\bar{N}}$ y el vector unitario binormal $\boldsymbol{\bar{B}}$, forman un triedro[2] en cualquier punto de la curva, y forman un sistema derecho de vectores unitarios, es decir,

$$\boldsymbol{\bar{B}} = \boldsymbol{\bar{T}} \times \boldsymbol{\bar{N}} \qquad \boldsymbol{\bar{N}} = \boldsymbol{\bar{B}} \times \boldsymbol{\bar{T}} \qquad \boldsymbol{\bar{T}} = \boldsymbol{\bar{N}} \times \boldsymbol{\bar{B}}$$

Se le llama triedro móvil porque, en general, para cada punto de una curva, los vectores $\boldsymbol{\bar{T}}$, $\boldsymbol{\bar{N}}$ y $\boldsymbol{\bar{B}}$ cambian de dirección, como se puede apreciar en la siguiente figura.

[2] Figura formada por tres semirectas, llamadas aristas, que parten del mismo punto, denominado vértice del triedro.

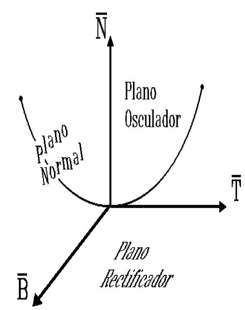


Los planos que contienen un par de vectores del triedro reciben los siguientes nombres:

Plano osculador[3] es aquel que contiene los vectores $\boldsymbol{\bar{T}}$ y $\boldsymbol{\bar{N}}$.

Plano rectificador es aquel que contiene los vectores $\boldsymbol{\bar{T}}$ y $\boldsymbol{\bar{B}}$.

Plano normal es aquel que contiene los vectores $\boldsymbol{\bar{N}}$ y $\boldsymbol{\bar{B}}$.



El estudio de los vectores $\boldsymbol{\bar{T}}$, $\boldsymbol{\bar{N}}$ y $\boldsymbol{\bar{B}}$ es ventajoso para referir los elementos cinemáticos (velocidades , aceleraciones), por ejemplo: la velocidad siempre tiene la dirección de $\boldsymbol{\bar{T}}$ y la aceleración siempre está contenida en el plano osculador.

[3] La palabra *osculador* significa literalmente *besador*.

FÓRMULAS DE FRENET-SERRET

Antes de introducir las fórmulas de Frenet-Serret, es necesario definir curvatura

Definición 2.15

Curvatura es la variación de la curva en cada uno de sus puntos, con respecto del parámetro longitud de arco s .

κ = curvatura $\qquad$ ρ = radio de curvatura

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} \qquad \rho = \frac{1}{\kappa}$$

La curvatura es un valor no negativo $\quad \kappa \geq 0$

En CII se vio que, si $y = f(x)$, la curvatura está dada por

$$\kappa = \frac{|y''|}{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Por otro lado, si se tiene una curva $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(s)$ y $\bar{\boldsymbol{T}}$ es el vector tangente unitario a $\bar{\boldsymbol{r}}$, entonces se tiene el siguiente teorema

Teorema

La derivada de $\bar{\boldsymbol{T}}$ con respecto de s es un vector perpendicular a $\bar{\boldsymbol{T}}$.

Demostración

Puesto que $\bar{\boldsymbol{T}}$ es de magnitud constante e igual a uno, $|\bar{\boldsymbol{T}}| = 1$

$$|\bar{\boldsymbol{T}}|^2 = 1 = \bar{\boldsymbol{T}} \cdot \bar{\boldsymbol{T}}$$

derivando

$$\frac{d}{ds}(\bar{\boldsymbol{T}} \cdot \bar{\boldsymbol{T}}) = \frac{d}{ds}(1)$$

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{T}}}{ds} \cdot \bar{\boldsymbol{T}} + \bar{\boldsymbol{T}} \cdot \frac{d\bar{\boldsymbol{T}}}{ds} = 0$$

$$2\left(\bar{\boldsymbol{T}} \cdot \frac{d\bar{\boldsymbol{T}}}{ds}\right) = 0$$

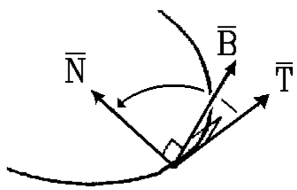
$$\bar{\boldsymbol{T}} \cdot \frac{d\bar{\boldsymbol{T}}}{ds} = 0 \qquad \therefore \qquad \bar{\boldsymbol{T}} \perp \frac{d\bar{\boldsymbol{T}}}{ds}$$

Q.E.D.

■

Y se concluye que $\dfrac{d\bar{\boldsymbol{T}}}{ds}$ es un vector perpendicular a la curva $\bar{\boldsymbol{r}}(s)$

El vector $\bar{\boldsymbol{T}}$ "gira" o "da vuelta" hacia el vector $\bar{\boldsymbol{N}}$ con una razón κ, medida con respecto a la longitud de arco, lo que se expresa como:



$$\boxed{\frac{d\bar{\boldsymbol{T}}}{ds} = \kappa \bar{\boldsymbol{N}}} \qquad \kappa \triangleq \text{curvatura}$$

Primera. Fórmula de Frenet-Serret

El vector binormal $\bar{\boldsymbol{B}}$, el cual está definido por $\bar{\boldsymbol{B}} = \bar{\boldsymbol{T}} \times \bar{\boldsymbol{N}}$ tiene módulo unitario, lo cual puede comprobarse de la siguiente manera

$$|\bar{\boldsymbol{B}}| = |\bar{\boldsymbol{T}} \times \bar{\boldsymbol{N}}| = |\bar{\boldsymbol{T}}|\,|\bar{\boldsymbol{N}}| \text{ sen } 90^o = 1$$

Ahora bien, como $|\bar{\boldsymbol{B}}| = 1$ entonces $\bar{\boldsymbol{B}} \cdot \bar{\boldsymbol{B}} = 1$ y derivando ambos lados

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{B}}}{ds} \cdot \bar{\boldsymbol{B}} + \bar{\boldsymbol{B}} \cdot \frac{d\bar{\boldsymbol{B}}}{ds} = 0$$

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{B}}}{ds}\cdot\bar{\boldsymbol{B}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\bar{\boldsymbol{B}}}{ds} \perp \bar{\boldsymbol{B}} \qquad \ldots (1)$$

y puesto que $\bar{\boldsymbol{B}} \perp \bar{\boldsymbol{T}} \quad \Rightarrow \quad \bar{\boldsymbol{B}} \cdot \bar{\boldsymbol{T}} = 0$ y derivando ambos lados con respecto de s

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{B}}}{ds}\cdot\bar{\boldsymbol{T}} + \bar{\boldsymbol{B}}\cdot\frac{d\bar{\boldsymbol{T}}}{ds} = 0$$

y de la primera fórmula de Frenet-Serret $\frac{d\bar{\boldsymbol{T}}}{ds} = \kappa\bar{\boldsymbol{N}}$

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{B}}}{ds}\cdot\bar{\boldsymbol{T}} + \bar{\boldsymbol{B}}\cdot\kappa\bar{\boldsymbol{N}} = 0$$

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{B}}}{ds}\cdot\bar{\boldsymbol{T}} = -\bar{\boldsymbol{B}}\cdot\kappa\bar{\boldsymbol{N}} = -\kappa\bar{\boldsymbol{B}}\cdot\bar{\boldsymbol{N}} = 0$$

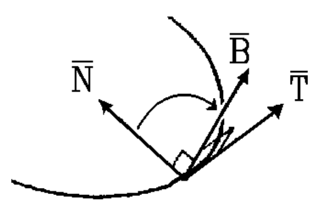
y de $\bar{\boldsymbol{B}}\cdot\bar{\boldsymbol{N}} = 0$, se concluye que

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{B}}}{ds} \perp \bar{\boldsymbol{T}} \qquad \ldots (2)$$

De (1) y (2) se tiene que $\frac{d\bar{\boldsymbol{B}}}{ds}$ es paralelo a $\bar{\boldsymbol{N}}$, es decir, son vectores proporcionales:

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{B}}}{ds} \propto \bar{\boldsymbol{N}}$$

Puesto que $\bar{\boldsymbol{T}}$, $\bar{\boldsymbol{N}}$ y $\bar{\boldsymbol{B}}$ forman un sistema derecho, si $\bar{\boldsymbol{N}}$ gira alrededor de $\bar{\boldsymbol{T}}$, entonces $\bar{\boldsymbol{N}}$ gira hacia $\bar{\boldsymbol{B}}$ a una cierta razón denominada torsión y denotada por la letra griega τ, por lo tanto $\bar{\boldsymbol{B}}$ gira hacia $-\bar{\boldsymbol{N}}$ a la misma razón τ. Finalmente:



$$\boxed{\frac{d\bar{\boldsymbol{B}}}{ds} = -\tau\bar{\boldsymbol{N}}}$$

Tercera fórmula de Frenet-Serret

Donde:

$\tau \triangleq$ Torsión

y a demás, se puede definir a σ como:

$\sigma \triangleq$ Radio de torsión

$$\sigma = \frac{1}{\tau}$$

Se han obtenido ya las expresiones para las variaciones de $\bar{\boldsymbol{T}}$ y $\bar{\boldsymbol{B}}$ con respecto al arco de curva, sólo resta obtener la variación de $\bar{\boldsymbol{N}}$ con respecto del mismo parámetro. Partiendo del triedro se tiene

$$\bar{\boldsymbol{N}} = \bar{\boldsymbol{B}} \times \bar{\boldsymbol{T}}$$

y derivando con respecto de s

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{N}}}{ds} = \frac{d}{ds}(\bar{\boldsymbol{B}}\times\bar{\boldsymbol{T}}) = \frac{d\bar{\boldsymbol{B}}}{ds}\times\bar{\boldsymbol{T}} + \bar{\boldsymbol{B}}\times\frac{d\bar{\boldsymbol{T}}}{ds}$$

sustituyendo la primera y la tercera fórmulas de Frenet-Serret $\frac{d\bar{\boldsymbol{T}}}{ds} = \kappa\bar{\boldsymbol{N}}$ y $\frac{d\bar{\boldsymbol{B}}}{ds} = -\tau\bar{\boldsymbol{N}}$

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{N}}}{ds} = -\tau\bar{\boldsymbol{N}}\times\bar{\boldsymbol{T}} + \bar{\boldsymbol{B}}\times\kappa\bar{\boldsymbol{N}} = -\tau(-\bar{\boldsymbol{B}}) + \kappa(-\bar{\boldsymbol{T}})$$

finalmente

$$\boxed{\frac{d\bar{\boldsymbol{N}}}{ds} = \tau\bar{\boldsymbol{B}} - \kappa\bar{\boldsymbol{T}}}$$

Segunda. fórmula de Frenet-Serret

En forma matricial, las fórmulas de Frenet - Serret se pueden escribir como:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d\bar{T}}{ds} \\ \dfrac{d\bar{N}}{ds} \\ \dfrac{d\bar{B}}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{N} \\ \bar{B} \end{bmatrix}$$

OBTENCIÓN DE LA CURVATURA

De la primera fórmula de F.-S. $\dfrac{d\bar{T}}{ds} = \kappa \bar{N} \quad \Rightarrow \quad \bar{N} = \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d\bar{T}}{ds}$

el vector $\dfrac{d\bar{T}}{ds}$ tiene la dirección de $\bar{N}$, pero $\dfrac{d\bar{T}}{ds}$ no es unitario, para que sea unitario, debe multiplicarse por el recíproco de su módulo, por lo que:

$$\boxed{\kappa = \left| \frac{d\bar{T}}{ds} \right|}$$

OBTENCIÓN DE LA TORSIÓN

Para obtener la torsión, podría plantearse, de la segunda fórmula de F.-S.

$\bar{N} = -\dfrac{1}{\tau}\dfrac{d\bar{B}}{ds}$, de donde al obtener el módulo en ambos lados de la igualdad, se tiene:

$$\tau = \pm \left| \frac{d\bar{B}}{ds} \right|$$

pero el signo de la torsión no se puede determinar de esta forma.

Por lo tanto, una forma correcta para obtener τ se obtiene de plantear la proyección del giro de $\bar{N}$ hacia $\bar{B}$:

$$\frac{d\bar{N}}{ds}\cdot\bar{B} = \bar{B}\cdot\frac{d\bar{N}}{ds} = \bar{B}\cdot(\tau\bar{B} - \kappa\bar{T}) = \tau(\bar{B}\cdot\bar{B}) - \kappa(\bar{B}\cdot\bar{T})$$

dado que $\bar{B}\cdot\bar{B} = 1$ y $\bar{B}\cdot\bar{T} = 0$, entonces:

$$\boxed{\tau = \frac{d\bar{N}}{ds}\cdot\bar{B}}$$

Ejemplo 2.19

Sea la función vectorial

$$\bar{r}(s) = (\operatorname{angtan} s)\,\boldsymbol{i} + (s - \operatorname{angtan} s)\,\boldsymbol{j} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(s^2+1)\right)\boldsymbol{k}$$

obtener, para cualquier valor de s

a) $\bar{T}$ b) $\bar{N}$ c) $\bar{B}$ d) κ

e) τ f) ρ g) σ

Resolución

a) $$\bar{T} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{1}{s^2+1}\boldsymbol{i} + \left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right)\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2s}{s^2+1}\boldsymbol{k}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{T} = \frac{1}{s^2+1}\left(\boldsymbol{i} + s^2\boldsymbol{j} + \sqrt{2}\,s\,\boldsymbol{k}\right) \qquad \text{...(a)}$$

b) De (a) y después de un poco de álgebra

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = -\frac{2s}{(s^2+1)^2}\boldsymbol{i} + \frac{2s}{(s^2+1)^2}\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{2}(1-s^2)}{(s^2+1)^2}\boldsymbol{k}$$

el vector $\dfrac{d\bar{T}}{ds}$ tiene la misma dirección que $\bar{N}$, pero $\bar{N}$ es unitario, por lo tanto el vector

$$\bar{n} = (s^2+1)^2\frac{d\bar{T}}{ds} = -2s\,\boldsymbol{i} + 2s\,\boldsymbol{j} + \sqrt{2}(1-s^2)\boldsymbol{k}$$

también tiene la dirección de $\bar{N}$, por lo que

$$\bar{N} = \frac{1}{|\bar{n}|}\bar{n} \ ; \qquad |\bar{n}| = \sqrt{4s^2 + 4s^2 + 2(1-s^2)^2}$$

$$|\bar{n}| = \sqrt{2s^4 + 4s^2 + 2} = \sqrt{2}\,(s^2+1)$$

finalmente

$$\bar{N} = \frac{1}{s^2+1}\left[-\sqrt{2}\,s\,\boldsymbol{i} + \sqrt{2}\,s\,\boldsymbol{j} + (1-s^2)\,\boldsymbol{k}\right]$$

c) De la definición del vector binormal $\bar{B} = \bar{T}\times\bar{N}$

sustituyendo los valores de $\bar{T}$ y $\bar{N}$

$$\bar{B} = \frac{1}{s^2+1}\,(\boldsymbol{i} + s^2\boldsymbol{j} + \sqrt{2}\,s\,\boldsymbol{k}) \times \frac{1}{s^2+1}\,(-\sqrt{2}\,s\,\boldsymbol{i} + \sqrt{2}\,s\,\boldsymbol{j} + (1-s^2)\,\boldsymbol{k})$$

$$\bar{B} = \frac{1}{(s^2+1)^2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & s^2 & \sqrt{2}\,s \\ -\sqrt{2}\,s & \sqrt{2}\,s & (1-s^2) \end{vmatrix}$$

de donde

$$\bar{B} = \frac{1}{s^2+1}\left[-s^2\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \sqrt{2}\,s\,\boldsymbol{k}\right]$$

d) Para obtener la curvatura $\kappa = \left|\frac{d\bar{T}}{ds}\right|$, pero en el inciso (b) se obtuvo

$$\bar{n} = (s^2+1)^2\frac{d\bar{T}}{ds} \quad \text{y} \quad |\bar{n}| = \sqrt{2}\,(s^2+1)\,, \text{ por lo tanto}$$

$$|\bar{n}| = \left|(s^2+1)^2\frac{d\bar{T}}{ds}\right| \Rightarrow \sqrt{2}\,(s^2+1) = (s^2+1)^2\left|\frac{d\bar{T}}{ds}\right|$$

de donde $$\left|\frac{d\bar{T}}{ds}\right| = \frac{\sqrt{2}\,(s^2+1)}{(s^2+1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{s^2+1}$$

finalmente $$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{s^2+1}$$

e) De $$\tau = \frac{d\bar{N}}{ds}\cdot\bar{B}$$

Y con $\bar{N}$ obtenido en el inciso (b), se tiene:

$$\frac{d\bar{N}}{ds} = \frac{1}{(s^2+1)^2}\left[(\sqrt{2}\,s^2-\sqrt{2})\,\boldsymbol{i} + (-\sqrt{2}\,s^2+\sqrt{2})\,\boldsymbol{j} - 4s\,\boldsymbol{k}\right]$$

y de $\bar{B}$ obtenido en el inciso (c)

$$\tau = \frac{d\bar{N}}{ds}\cdot\bar{B} = \frac{1}{(s^2+1)^3}(-\sqrt{2}\,s^4 + \sqrt{2}\,s^2 + \sqrt{2}\,s^2 - \sqrt{2} - 4\sqrt{2}\,s^2)$$

simplificando $$\tau = -\frac{\sqrt{2}}{s^2+1}$$

f) De la fórmula del radio de curvatura, $\rho = \frac{1}{k}$

$$\rho = \frac{s^2+1}{\sqrt{2}}$$

g) De la fórmula para del radio de torsión $\sigma = \frac{1}{\tau}$

$$\sigma = -\frac{s^2+1}{\sqrt{2}}$$

Para el ejemplo anterior, fue muy sencillo obtener los resultados debido a que la función tenía como parámetro la longitud de curva s, es decir se tenía $\bar{r} = \bar{r}(s)$; sin embargo, no siempre se tiene a s como parámetro. Si se tiene una función $\bar{r} = \bar{r}(t)$ un procedimiento puede ser cambiar el parámetro t por s , a través de la expresión general que los relaciona.

Supóngase que se tiene una función vectorial en función de t y que se desea obtener su curvatura, un procedimiento sería el siguiente:

Si se tiene $\bar{r} = \bar{r}(t)$, puede considerarse que $t = t(s)$ y aplicar la regla de la cadena

$$\bar{r} = \bar{r}\,(\,t\,(s)\,)$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \bar{T}\,\frac{ds}{dt} \qquad \ldots (1)$$

Obteniendo el módulo de los vectores a cada lado de la igualdad

$$\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| = (\,1\,)\left|\frac{ds}{dt}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right| \qquad \ldots (2)$$

Y de las fórmulas de Frenet-Serret:

$$\frac{d\bar{T}}{dt} = \frac{d\bar{T}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \kappa\,\bar{N}\,\frac{ds}{dt} \qquad \ldots (3)$$

De (1) derivando con respecto de t :

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{ds}{dt}\,\bar{T}\right] = \frac{d^2s}{dt^2}\,\bar{T} + \frac{ds}{dt}\,\frac{d\bar{T}}{dt} \qquad \ldots (4)$$

Sustituyendo (3) en (4)

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\,\bar{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa\,\bar{N} \qquad \ldots (5)$$

si se multiplica $\dfrac{d\bar{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \left[\frac{ds}{dt}\,\bar{T}\right] \times \left[\frac{d^2s}{dt^2}\,\bar{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa\,\bar{N}\right] \qquad \ldots (6)$$

$$= \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \kappa\,\bar{T} \times \bar{N} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \kappa\,\bar{B}$$

Obteniendo el módulo:

$$\left|\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|^3 \kappa\,; \quad \text{puesto que} \quad |\,\bar{B}\,| = 1$$

sustituyendo (2)

$$= \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|^3 \kappa$$

despejando κ, se tiene:

$$\kappa = \frac{\left|\dfrac{d\bar{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|}{\left|\dfrac{d\bar{r}}{dt}\right|^3}$$

simplificando la notación

$$\kappa = \frac{|\,\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\,|}{|\,\bar{r}'(t)\,|^3}$$

Realizando una análisis similar, utilizando la regla de la cadena y las fórmulas de Frenet-Serret, para una función vectorial $\bar{r} = \bar{r}(t)$ se tiene

$$\tau = \frac{[\,\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\,] \cdot \bar{r}'''(t)}{|\,\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\,|^2}$$

Además: $$\bar{T} = \frac{\bar{r}'(t)}{|\,\bar{r}'(t)\,|}$$

$$\bar{B} = \frac{\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)}{|\,\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\,|}$$

$$\bar{N} = \frac{[\,\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\,] \times \bar{r}'(t)}{|\,[\,\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\,] \times \bar{r}'(t)\,|}$$

Las expresiones anteriores son más fáciles de recordar si se utiliza la notación de la velocidad y la aceleración, teniéndose:

$$\kappa = \frac{|\bar{v}(t) \times \bar{a}(t)|}{|\bar{v}(t)|^3}$$

$$\tau = \frac{[\bar{v}(t) \times \bar{a}(t)] \cdot \dot{\bar{a}}(t)}{|\bar{v}(t) \times \bar{a}(t)|^2}$$

$$\bar{T} = \frac{\bar{v}(t)}{|\bar{v}(t)|}$$

$$\bar{B} = \frac{\bar{v}(t) \times \bar{a}(t)}{|\bar{v}(t) \times \bar{a}(t)|}$$

$$\bar{N} = \frac{[v(t) \times \bar{a}(t)] \times \bar{v}(t)}{|[\bar{v}(t) \times \bar{a}(t)] \times \bar{v}(t)|}$$

y de los resultados del álgebra vectorial, y relacionando con la cinemática, las componentes escalares tangencial y normal de la aceleración se pueden escribir como:

$$a_T(t) = \frac{\bar{v}(t) \cdot \bar{a}(t)}{|\bar{v}(t)|} \qquad a_N(t) = \frac{|\bar{v}(t) \times \bar{a}(t)|}{|\bar{v}(t)|}$$

Ejemplo 2.20

Para la función vectorial $\bar{r}(t) = 3t\cos t\ \mathbf{i} + 3t\operatorname{sen} t\ \mathbf{j} + 4t\ \mathbf{k}$ donde t representa el tiempo y $\bar{r}(t)$ la posición de una partícula, obtener:

a) La velocidad en cualquier instante y la rapidez.

b) Las componentes tangencial y normal de la aceleración.

c) El vector tangente unitario $\bar{T}$.

d) La curvatura de la curva en función del tiempo.

Resolución

a) Dado que la velocidad es la variación de la posición con respecto del tiempo

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}}{dt} = (-3t\operatorname{sen} t + 3\cos t)\mathbf{i} + (3t\cos t + 3\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\underline{\underline{\bar{v}(t) = (3\cos t - 3t\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (3\operatorname{sen} t + 3t\cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}}$$

La rapidez es el módulo de la velocidad

$$\text{Rapidez} = |\bar{v}(t)| = [(3\cos t - 3t\operatorname{sen} t)^2 + (3\operatorname{sen} t + 3t\cos t)^2 + (4)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [(9\cos^2 t - 9t\cos t\operatorname{sen} t + 9t^2\operatorname{sen}^2 t) + (9\operatorname{sen}^2 t + 9t\operatorname{sen} t\cos t + 9t^2\cos^2 t) + 16]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [9(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) + 9t^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) + 16]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [9 + 9t^2 + 16]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9t^2 + 25}$$

finalmente $\underline{\underline{|\bar{v}(t)| = \sqrt{9t^2 + 25}}}$

b) La componente tangencial de la aceleración, se obtiene de la componente escalar de $\bar{a}(t)$ sobre $\bar{v}(t)$.

$$a_T(t) = \frac{\bar{v}(t) \cdot \bar{a}(t)}{|\bar{v}(t)|}$$

Mientras que la componente normal de la aceleración se obtiene de

$$a_N(t) = \frac{|\bar{v}(t) \times \bar{a}(t)|}{|\bar{v}(t)|}$$

por lo que

$$\bar{a}(t) = \frac{d\bar{v}(t)}{dt} = (-3\operatorname{sen} t - 3t\cos t - 3\operatorname{sen} t)\mathbf{i} +$$

$$+ (3\cos t - 3t\operatorname{sen} t + 3\cos t)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$= (-6\operatorname{sen} t - 3t\cos t)\mathbf{i} + (6\cos t - 3t\operatorname{sen} t)\mathbf{j}$$

$$\bar{v}(t) \cdot \bar{a}(t) = (3\cos t - 3t\operatorname{sen} t)(-6\operatorname{sen} t - 3t\cos t) +$$

$$+ (3\operatorname{sen} t + 3t\cos t)(6\cos t - 3t\operatorname{sen} t)$$

$$= -18\operatorname{sen} t\cos t - 9t\cos^2 t + 18t\operatorname{sen}^2 t + 9t^2\operatorname{sen} t\cos t +$$

$$+ 18\operatorname{sen} t\cos t - 9t\operatorname{sen}^2 t + 18t\cos^2 t - 9t^2\operatorname{sen} t\cos t$$

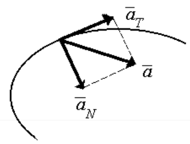
$$= -9t + 18t = 9t$$

finalmente la componente tangencial de la aceleración es

$$\underline{\underline{a_T = \frac{9t}{\sqrt{9t^2 + 25}}}}$$

Puesto que ya se han calculado la aceleración y la componente tangencial de la aceleración, entonces del teorema de Pitágoras se tiene la relación

$$\boxed{|\bar{\boldsymbol{a}}(t)|^2 = a_T^2 + a_N^2}$$



de donde, $a_N = \sqrt{|\bar{\boldsymbol{a}}(t)|^2 - a_T^2}$

$$|\bar{\boldsymbol{a}}(t)| = [(-6\operatorname{sen}t - 3t\cos t)^2 + (6\cos t - 3t\operatorname{sen}t)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [36\operatorname{sen}^2 t + 18t\operatorname{sen}t\cos t + 9t^2\cos^2 t + 36\cos^2 t - 18t\operatorname{sen}t\cos t + 9t^2\operatorname{sen}^2 t]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [36 + 9t^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36 + 9t^2}$$

sustituyendo

$$a_N = \sqrt{36 + 9t^2 - \frac{81t^2}{9t^2 + 25}} = \sqrt{\frac{(9t^2 + 25)(36 + 9t^2) - 81t^2}{9t^2 + 25}}$$

c) Para obtener el vector tangente unitario se tiene que:

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \frac{\bar{\boldsymbol{r}}'(t)}{|\bar{\boldsymbol{r}}'(t)|} = \frac{(3\cos t - 3t\operatorname{sen}t)\,\boldsymbol{i} + (3\operatorname{sen}t + 3t\cos t)\,\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}}{\sqrt{9t^2 + 25}}$$

d) $$\kappa = \frac{|\bar{\boldsymbol{v}}(t) \times \bar{\boldsymbol{a}}(t)|}{|\bar{\boldsymbol{v}}(t)|^3} = \frac{a_N}{|\bar{\boldsymbol{v}}(t)|^2} = \frac{\sqrt{(9t^2 + 25)(36 + 9t^2) - 81t^2}}{\sqrt{9t^2 + 25}\;(9t^2 + 25)}$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{324t^2 + 81t^4 + 900 + 225t^2 - 81t^2}}{(9t^2 + 25)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{468t^2 + 81t^4 + 900}}{(9t^2 + 25)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{9(9t^4 + 52t^2 + 100)}}{(9t^2 + 25)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3\sqrt{9t^4 + 52t^2 + 100}}{(9t^2 + 25)^{\frac{3}{2}}}$$

Ejemplo 2.21

Dada la curva descrita por la función vectorial

$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) = 3t\,\boldsymbol{i} + 3\operatorname{sen}t\,\boldsymbol{j} + 3\cos t\,\boldsymbol{k}$$

Obtener los vectores tangente, normal y binormal; planos normal, osculador y rectificante; la torsión, curvatura y el radio de curvatura en el instante en el que $t = \pi$.

Resolución

De la función vectorial

$\bar{\boldsymbol{r}} = 3t\,\boldsymbol{i} + 3\operatorname{sen}t\,\boldsymbol{j} + 3\cos t\,\boldsymbol{k}$

Se obtiene

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt} = 3\,\boldsymbol{i} + 3\cos t\,\boldsymbol{j} - 3\operatorname{sen}t\,\boldsymbol{k}$$

y $\left|\dfrac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt}\right| = 3\sqrt{2}$

Puesto que $\bar{\boldsymbol{T}} = \dfrac{\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt}\right|}$ entonces

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \frac{3\,\boldsymbol{i} + 3\cos t\,\boldsymbol{j} - 3\operatorname{sen}t\,\boldsymbol{k}}{3\sqrt{2}} = \frac{\boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}t\,\boldsymbol{k}}{\sqrt{2}}$$

Valuando en $t = \pi$ $\quad \bar{\boldsymbol{T}} = \dfrac{\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}$

Para el vector normal $\bar{\boldsymbol{N}} = \dfrac{\frac{d\bar{\boldsymbol{T}}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{\boldsymbol{T}}}{dt}\right|}$

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{T}}}{dt} = \frac{-\operatorname{sen}t\,\boldsymbol{j} - \cos t\,\boldsymbol{k}}{\sqrt{2}} \qquad \left|\frac{d\bar{\boldsymbol{T}}}{dt}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

de donde

$$\bar{N} = -\operatorname{sen} t\, \boldsymbol{j} - \cos t\, \boldsymbol{k}$$

valuado en $t = \pi$, $\underline{\underline{\bar{N} = \boldsymbol{k}}}$

Para la curvatura $\kappa = \dfrac{\left|\dfrac{d\bar{T}}{dt}\right|}{\left|\dfrac{d\bar{r}}{dt}\right|}$, de donde

$$\underline{\underline{\kappa = \frac{\frac{1}{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{6}}}$$ y el radio de curvatura es $\underline{\underline{\rho = 6}}$

Para el vector binormal

$$\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\cos t}{\sqrt{2}} & \frac{-\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\operatorname{sen} t & -\cos t \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-\cos t - sen^2 t}{\sqrt{2}}\, \boldsymbol{i} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\, \boldsymbol{j} - \frac{sen\, t}{\sqrt{2}}\, \boldsymbol{k}$$

$$\bar{B} = \frac{-\boldsymbol{i} + \cos t\, \boldsymbol{j} - sen\, t\, \boldsymbol{k}}{\sqrt{2}}$$

En $t = \pi$ $\underline{\underline{\bar{B} = \dfrac{-\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}}}$

Para obtener la torsión y el radio de torsión, de la segunda fórmula de Frenet-Serret

$$\frac{d\bar{B}}{ds} = -\tau \bar{N}$$

Para obtener $\dfrac{d\bar{B}}{ds}$

$$\frac{d\bar{B}}{ds} = \frac{d\bar{B}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\bar{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d\bar{B}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|}$$

$$\frac{d\bar{B}}{dt} = \frac{-\operatorname{sen} t\, \boldsymbol{j} - \cos t\, \boldsymbol{k}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{d\bar{B}}{ds} = \frac{-\operatorname{sen} t\, \boldsymbol{j} - \cos t\, \boldsymbol{k}}{6} = -\tau \bar{N}$$

$$\frac{d\bar{B}}{ds} = -\tau\, [-\operatorname{sen} t\, \boldsymbol{j} - \cos t\, \boldsymbol{k}] \quad \therefore \quad \underline{\underline{\tau = -\frac{1}{6}}}$$

Y el radio de torsión es $\underline{\underline{\sigma = \dfrac{1}{\tau} = -6}}$

Para el plano normal se utiliza el vector tangente y el punto que se obtiene de $\bar{r}(\pi)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 3\pi) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y - 0) + 0 = 0$$

$x - 3\pi - y = 0$ $\underline{\underline{x - y = 3\pi}}$

Para el plano osculador se utiliza el vector binormal.

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 3\pi) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y) = 0$$

$$\underline{\underline{x + y = 3\pi}}$$

Para el plano rectificante se utiliza el vector normal.

$1(z + 3) = 0$

$$\underline{\underline{z = -3}}$$

Ejemplo 2.22

Comprobar que la curva de ecuaciones:

$$x = 2\,\text{sen}\,t \qquad y = 2\sqrt{3}\,\text{sen}\,t \qquad z = 4\cos t$$

está contenido en un plano.

Resolución

Del enunciado se obtiene la función vectorial

$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) = 2\,\text{sen}\,t\,\boldsymbol{i} + 2\sqrt{3}\,\text{sen}\,t\,\boldsymbol{j} + 4\cos t\,\boldsymbol{k}$$

de donde

$$\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}(t) = 2\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sqrt{3}\cos t\,\boldsymbol{j} - 4\,\text{sen}\,t\,\boldsymbol{k}$$

$$\ddot{\bar{\boldsymbol{r}}}(t) = -2\,\text{sen}\,t\,\boldsymbol{i} - 2\sqrt{3}\,\text{sen}\,t\,\boldsymbol{j} - 4\cos t\,\boldsymbol{k}$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{r}}} \times \ddot{\bar{\boldsymbol{r}}} = 4\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos t & \sqrt{3}\cos t & -2\,\text{sen}\,t \\ -\text{sen}\,t & -\sqrt{3}\,\text{sen}\,t & -2\cos t \end{vmatrix} = 4(-2\sqrt{3}\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 0\,\boldsymbol{k})$$

$$|\dot{\bar{\boldsymbol{r}}} \times \ddot{\bar{\boldsymbol{r}}}| = 4\sqrt{12 + 4} = 16$$

por lo que $\qquad \bar{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{3},\ 1,\ 0\right],$

puesto que $\bar{\boldsymbol{B}}$ es constante, la curva está contenida en un plano.

Ejemplo 2.23

Dada la curva $\bar{\boldsymbol{r}}(t) = (t^2 + 2t - 1)\,\boldsymbol{i} + (3t^2 - 5t)\,\boldsymbol{j} + (t + 2)\,\boldsymbol{k}$

a) Demostrar que la curva $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ se encuentra contenida en un plano.

b) Obtener la ecuación del plano osculador.

c) Obtener el punto donde $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ tiene el mínimo radio de curvatura.

Resolución

a) Si la torsión es cero, entonces la curva se encuentra contenida en un plano.

$$\tau = \frac{\bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\boldsymbol{a}} \cdot \dot{\bar{\boldsymbol{a}}}}{|\bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\boldsymbol{a}}|^2}$$

calculando $\quad \bar{\boldsymbol{v}}(t) = (2t + 2)\,\boldsymbol{i} + (6t - 5)\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

$$\bar{\boldsymbol{a}}(t) = 2\,\boldsymbol{i} + 6\,\boldsymbol{j}$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{a}}} = \bar{\boldsymbol{0}}$$

al ser $\dot{\bar{\boldsymbol{a}}} = \bar{\boldsymbol{0}}$, el producto $\bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\boldsymbol{a}} \cdot \dot{\bar{\boldsymbol{a}}}$ es igual a cero, y $\tau = 0$, por lo que la curva está contenida en un plano.

b) El plano osculador tiene como vector normal a $\bar{\boldsymbol{B}}$, y la dirección del vector $\bar{\boldsymbol{B}}$ está dada por $\bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\boldsymbol{a}}$

$$\bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\boldsymbol{a}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2t + 2 & 6t - 5 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -6\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 22\,\boldsymbol{k}$$

Y un vector con la misma dirección es:

$$\bar{\boldsymbol{u}} = -3\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 11\,\boldsymbol{k}$$

Por otro lado, un punto de la curva se puede obtener el valuar $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$, por ejemplo en $t = 0$

$$\bar{\boldsymbol{r}}(0) = -\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{k}$$

y se tiene el punto $(-1, 0, 2)$.

Finalmente, la ecuación del plano osculador es:

$$-3(x + 1) + 1(y - 0) + 11(z - 2) = 0$$

simplificando: $\qquad \underline{\underline{-3x + y + 11z - 25 = 0}}$

---

c) Para obtener el punto con el mínimo radio de curvatura, se debe obtener primero la función de radio de curvatura.

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{|\bar{v}|^3}{|\bar{v} \times \bar{a}|}$$

sustituyendo y simplificando se tiene: $$\rho = \frac{\left(30 - 52t + 40t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{131}}$$

Para obtener el mínimo de ρ se deriva, se iguala a cero y se resuelve la ecuación

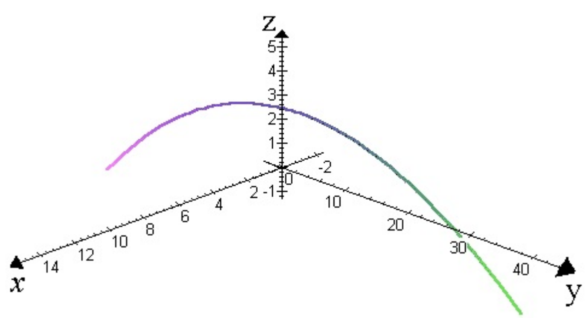
$$\rho' = \frac{(-13 + 20t)\sqrt{30 - 52t + 40t^2}}{2\sqrt{131}} = 0$$

De donde: $$t = \frac{13}{20}$$

Y el punto de mínima curvatura es:

$$\bar{r}\left(\frac{13}{20}\right) = \underline{\underline{\left[\frac{289}{400}, -\frac{793}{400}, \frac{53}{20}\right]}}$$

En el ejemplo anterior, la curva es una parábola en el espacio, la cual se muestra en la siguiente figura.



Ejemplo 2.24

Si la posición de una partícula está dada por

$$\bar{r}(t) = (3t - t^3)\,\boldsymbol{i} + 3t^2\boldsymbol{j} + (3t + t^3)\,\boldsymbol{k}$$

determinar el instante t, para el cual el radio de torsión es mínimo.

Resolución

$\sigma \triangleq$ radio de torsión $$\sigma(t) = \frac{\left|\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t)\right|^2}{\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t) \cdot \dddot{\bar{r}}(t)}$$

Por lo que

$$\dot{\bar{r}}(t) = [3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2]$$

$$\ddot{\bar{r}}(t) = [-6t, 6, 6t]$$

$$\dddot{\bar{r}}(t) = [-6, 0, 6]$$

De donde

$$\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 - 3t^2 & 6t & 3 + 3t^2 \\ -6t & 6 & 6t \end{vmatrix}$$

$$= [18t^2 - 18, -36t, 18t^2 + 18]$$

$$\left|\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t)\right| = 18\left[(t^2 - 1)^2 + (-2t)^2 + (t^2 + 1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Sustituyendo en $\sigma(t)$

$$\sigma(t) = \frac{(18)^2[(t^2-1)^2+(-2t)^2+(t^2+1)^2]}{18[t^2-1,-2t,1+t^2]\cdot[-6,0,6]}$$

$$= \frac{3(1-t^2+1+t^2)}{(t^2-1)^2+(-2t)^2+(1+t^2)^2} = 3(1+t^2)^2$$

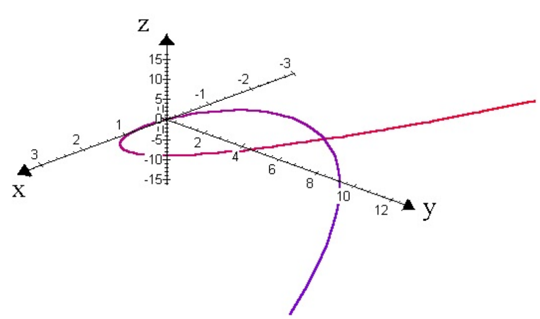
$\sigma(t) = 3(1+t^2)^2$ Para obtener el mínimo se deriva y se iguala a cero

$\sigma'(t) = 6(1+t^2)(2t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$

Finalmente:

σ es mínimo en $\underline{\underline{t = 0}}$

La gráfica de la función anterior es:



Ejemplo 2.25

Una partícula se mueve a lo largo de la trayectoria descrita por

$$\bar{r}(t) = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + \left(t + \frac{t^3}{3}\right)\boldsymbol{k}$$

Obtener el centro de curvatura de la trayectoria en el punto $P\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right)$.

Resolución

Para obtener el centro de curvatura es necesario obtener primero la curvatura.

La curvatura está dada por $\quad \kappa = \dfrac{|\bar{v}\times\bar{a}|}{|\bar{v}|^3}$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = (1-t^2)\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + (1+t^2)\boldsymbol{k}$$

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -2t\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$$

Para obtener el valor de t para el cual la función vectorial tiene como valor al vector de posición del punto $P\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right)$, se utilizan las ecuaciones paramétricas y se resuelve para t.

$$x = \frac{2}{3} = t - \frac{t^3}{3}$$

$$y = 1 = t^2$$

$$z = \frac{4}{3} = t + \frac{t^3}{3}$$

De donde $t = 1$.

Sustituyendo $t = 1$ en $\bar{v}$ y $\bar{a}$ se obtiene

$\bar{v}(1) = 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

$\bar{a}(1) = -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

por lo que $\bar{\boldsymbol{v}}(1) \times \bar{\boldsymbol{a}}(1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$

$$|\bar{\boldsymbol{v}}(1) \times \bar{\boldsymbol{a}}(1)| = 4\sqrt{2}$$

$$|\bar{\boldsymbol{v}}(1)| = 2\sqrt{2}$$

$$\kappa(1) = \frac{4\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^3} = \frac{1}{4}$$

y el radio de curvatura es $\rho = \dfrac{1}{\kappa} = 4$

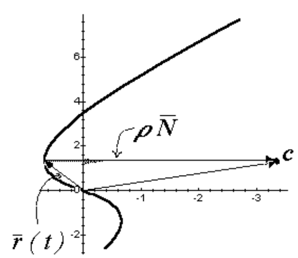
El centro de curvatura está en la dirección del vector normal: $\bar{\boldsymbol{N}} = \dfrac{(\bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\boldsymbol{a}}) \times \bar{\boldsymbol{v}}}{|(\bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\boldsymbol{a}}) \times \bar{\boldsymbol{v}}|}$

En el instante $t = 1$

$$(\bar{\boldsymbol{v}}(1) \times \bar{\boldsymbol{a}}(1)) \times \bar{\boldsymbol{v}}(1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -16\,\boldsymbol{i}$$

$$\bar{\boldsymbol{N}}(1) = -\boldsymbol{i}$$

De la figura



Se observa que: $\overline{oc} = \bar{\boldsymbol{r}}(t) + \rho\bar{\boldsymbol{N}}$; donde c es el centro de curvatura.

En $t = 1$

$$\overline{oc} = \bar{\boldsymbol{r}}(1) + 4(-\boldsymbol{i}) = \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \frac{4}{3}\boldsymbol{k}\right) - 4\boldsymbol{i} = -\frac{10}{3}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \frac{4}{3}\boldsymbol{k}$$

Finalmente el centro de curvatura es: $\underline{\underline{c\left(-\frac{10}{3}, 1, \frac{4}{3}\right)}}$

ANÁLISIS DE FUNCIONES VECTORIALES $\bar{\boldsymbol{F}}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Como se mencionó al principio del capítulo una función vectorial $\bar{\boldsymbol{F}} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ puede representar una superficie, el caso más simple es el de la ecuación vectorial del plano pero en general una función vectorial de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ se representa gráficamente como una superficie alabeada[4].

Una función vectorial

$$\bar{\boldsymbol{F}}(s,t) = f_1(s,t)\,\boldsymbol{i} + f_2(s,t)\,\boldsymbol{j} + f_3(s,t)\,\boldsymbol{k}$$

puede expresarse fácilmente en forma paramétrica:

$$x = f_1(s,t)$$
$$y = f_2(s,t)$$
$$z = f_3(s,t)$$

y a su vez se puede obtener la ecuación cartesiana de la superficie eliminando los dos parámetros (s y t) del sistema de ecuaciones.

Ejemplo 2.26

Dada la siguiente función vectorial, determinar su ecuación en forma cartesiana.

$$\bar{\boldsymbol{r}}(s,t) = s\,\boldsymbol{i} + t\,\boldsymbol{j} + st\,\boldsymbol{k}$$

Resolución

Las ecuaciones paramétricas son:

[4] Superficie curva generado por una línea que cambia continuamente de dirección en los tres sentidos de sus dimensiones.

$$x = s \qquad \ldots (a)$$
$$y = t \qquad \ldots (b)$$
$$z = st \qquad \ldots (c)$$

Sustituyendo (a) y (b) en (c)

$$z = xy$$

que es la ecuación cartesiana buscada, $z = xy$ es un paraboloide hiperbólico rotado 45º.

———————————————————————————

Ejemplo 2.27

Dada la siguiente función vectorial, determinar su ecuación en forma cartesiana.

$$\bar{r}(u,v) = u\cos v\ \boldsymbol{i} + u\,\mathrm{sen}\,v\ \boldsymbol{j} + u\ \boldsymbol{k} \quad , \quad u > 0$$

Resolución

Obteniendo las ecuaciones paramétricas

$$x = u\cos v \qquad \ldots (a)$$
$$y = u\,\mathrm{sen}\,v \qquad \ldots (b)$$
$$z = u \qquad \ldots (c)$$

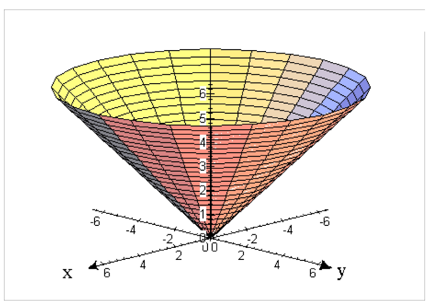
De (a) y (b)

$$x^2 + y^2 = u^2\cos^2 v + u^2\,\mathrm{sen}^2 v = u^2(\cos^2 v + \mathrm{sen}^2 v)$$
$$x^2 + y^2 = u^2$$

y sustituyendo (c) $\quad x^2 + y^2 = z^2 \qquad z > 0$

por lo que $\quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$

y representa un semi-cono.



———————————————————————————

DERIVACIÓN PARCIAL DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL $\bar{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Una función vectorial de n variables puede derivarse con respecto a cada una de sus variables, lo que da origen a la derivación parcial de funciones vectoriales.

Definición 2.16

Sea $\bar{F} = \bar{F}(\bar{x})$ una función vectorial, donde

$\bar{F}(\bar{x}) = f_1(\bar{x})\,\hat{e}_1 + f_2(\bar{x})\,\hat{e}_2 + \ldots + f_m(\bar{x})\,\hat{e}_m$ y

$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Entonces la derivada parcial de $\bar{F}$ con respecto de $x_i \quad i = 1, \ldots, n$ se define como:

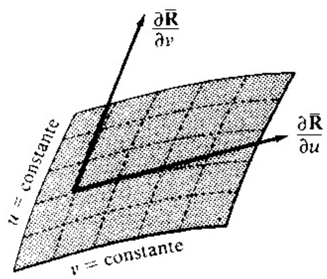
$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{1}{\Delta x_i}\left[\bar{F}(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - \bar{F}(\bar{x})\right]$$

Para el caso particular en el cual una función $\bar{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ representa una superficie se tiene la siguiente interpretación geométrica .

Supóngase que se tiene la función vectorial

$$\bar{R} = \bar{R}(u,v) = R_1(u,v)\ \boldsymbol{i} + R_2(u,v)\ \boldsymbol{j} + R_3(u,v)\ \boldsymbol{k}$$

entonces $\dfrac{\partial \bar{R}}{\partial u}$ representa un vector tangente a la curva v igual a constante (curva contenida dentro de la superficie) y por lo tanto, también es tangente a la superficie descrita por $\bar{R}$. De igual forma $\dfrac{\partial \bar{R}}{\partial v}$ es un vector tangente a la curva u igual a constante y a la superficie $\bar{R}$. Los vectores $\dfrac{\partial \bar{R}}{\partial v}$ y $\dfrac{\partial \bar{R}}{\partial u}$ se muestran en la siguiente figura.



Por lo tanto, un vector $\bar{n}$, normal a la superficie se puede obtener mediante:

$$\bar{n} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{R}}{\partial v}$$

Ejemplo 2.29

Obtener un vector normal a la superficie

$$\bar{r}(u,v) = u\cos v\ \boldsymbol{i} + u\,\mathrm{sen}\,v\ \boldsymbol{j} + u\ \boldsymbol{k} \qquad u>0$$

en el punto en el que $u = 2$ y $v = \dfrac{\pi}{2}$.

Resolución

Valuando las derivadas parciales obtenidas en el ejemplo anterior

$$\left.\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\right|_{\substack{u=2\\ v=\frac{\pi}{2}}} = 0\ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

$$\left.\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\right|_{\substack{u=2\\ v=\frac{\pi}{2}}} = -2\ \boldsymbol{i} + 0\ \boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$$

$$\therefore \quad \bar{n} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = [0,1,1] \times [-2,0,0] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\bar{n} = 0\ \boldsymbol{i} - 2\ \boldsymbol{j} + 2\ \boldsymbol{k}}}$$

Para una función vectorial $\bar{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es posible obtener su diferencial. Así para una función $\bar{F} = \bar{F}(\bar{x}) = f_1(\bar{x})\,\hat{e}_1 + f_2(\bar{x})\,\hat{e}_2 + \ldots + f_m(\bar{x})\,\hat{e}_m$ la diferencial de $\bar{F}$ se define como:

$$\boxed{d\bar{F}(\bar{x}) = df_1(\bar{x})\,\hat{e}_1 + df_2(\bar{x})\,\hat{e}_2 + \ldots + df_m(\bar{x})\,\hat{e}_m}$$

en particular, si $\bar{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\bar{F} = \bar{F}(x,y,z) = f_1\ \boldsymbol{i} + f_2\ \boldsymbol{j} + f_3\ \boldsymbol{k}$$

donde $\qquad f_i = f_i(x,y,z) \qquad i = 1,2,3$

entonces

$$d\bar{F} = df_1\ \boldsymbol{i} + df_2\ \boldsymbol{j} + df_3\ \boldsymbol{k}$$

desarrollando cada una de las diferenciales:

$$d\bar{F} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz \right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz \right) \boldsymbol{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}dy + \frac{\partial f_3}{\partial z}dz \right) \boldsymbol{k}$$

reagrupando

$$d\bar{F} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \boldsymbol{j} + \frac{\partial f_3}{\partial x} \boldsymbol{k} \right) dx + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \boldsymbol{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial f_3}{\partial y} \boldsymbol{k} \right) dy$$

$$+ \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \boldsymbol{i} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \boldsymbol{j} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \boldsymbol{k} \right) dz$$

la cual se puede escribir como

$$\boxed{d\bar{F} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{F}}{\partial z} dz}$$

con lo que se demuestra que la estructura de la diferencial se mantiene a pesar de obtenerse una diferencial de función vectorial.

Ejemplo 2.30

Sea la función vectorial

$$\bar{F} = \bar{F}(x, y, z) = 3x^2yz\, \boldsymbol{i} + 9xyz\, \boldsymbol{j} + xye^z\, \boldsymbol{k}$$

Obtener $d\bar{F}$

Resolución

Puesto que

$$d\bar{F} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{F}}{\partial z} dz \quad \ldots \text{(a)}$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} = 6xyz\, \boldsymbol{i} + 9yz\, \boldsymbol{j} + ye^z\, \boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y} = 3x^2z\, \boldsymbol{i} + 9xz\, \boldsymbol{j} + xe^z\, \boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial z} = 3x^2y\, \boldsymbol{i} + 9xy\, \boldsymbol{j} + xye^z\, \boldsymbol{k}$$

sustituyendo en (a) las derivadas parciales se obtiene

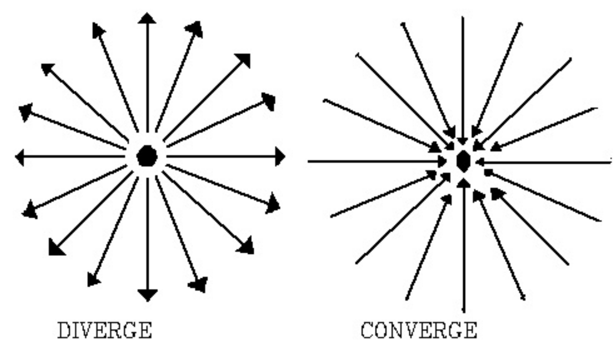
$$d\bar{F} = (6xyz\, \boldsymbol{i} + 9yz\, \boldsymbol{j} + ye^z\, \boldsymbol{k})\, dx + (3x^2z\, \boldsymbol{i} + 9xz\, \boldsymbol{j} + xe^z\, \boldsymbol{k})\, dy$$

$$+ (3x^2y\, \boldsymbol{i} + 9xy\, \boldsymbol{j} + xye^z\, \boldsymbol{k})\, dz$$

CONCEPTOS CON LOS QUE SE MIDEN LAS VARIACIONES DE LOS CAMPOS VECTORIALES

En el curso de CII se estudiaron las funciones escalares, y se definió el gradiente de una función escalar, el cual describe la razón de cambio de dicha función. Ahora, para los campos vectoriales (que son un caso particular de las funciones vectoriales) se estudiarán dos nuevos conceptos para medir sus variaciones : la *divergencia* y el *rotacional*.

La divergencia de un campo vectorial es un campo escalar (función escalar) que indica en cada punto el grado de "explosión" o "divergencia" del campo en dicho punto.



Definición 2.17

La divergencia de un campo vectorial $\bar{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\bar{F} = \bar{F}(x,y,z) = f_1\, \boldsymbol{i} + f_2\, \boldsymbol{j} + f_3\, \boldsymbol{k}$$

donde $f_i = f_i(x,y,z) \quad i = 1,2,3$

se define como

$$\text{div}\ \bar{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

La divergencia de un campo vectorial $\bar{F}$ se denota $\textit{div}\ \bar{F}$; sin embargo, una forma práctica de recordar la expresión que define la divergencia de un campo vectorial es la siguiente:

$$\textit{div}\ \bar{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\, \boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\, \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\, \boldsymbol{k} \right) \cdot \left(f_1\, \boldsymbol{i} + f_2\, \boldsymbol{j} + f_3\, \boldsymbol{k} \right)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \bar{F}$$

es decir:

$$\boxed{\textit{div}\ \bar{F} = \bar{\nabla} \cdot \bar{F}}$$

donde $\bar{\nabla}$ es el operador nabla.

En física, la divergencia de un campo representa el flujo neto por unidad de volumen de un fluido en cada punto. Por supuesto, puede interpretarse como el flujo neto por unidad de volumen y por unidad de tiempo.

Un punto de un campo vectorial se puede clasificar en punto fuente, pozo o sumidero e incompresible.

Si $\textit{div}\ \bar{F} > 0$ en un punto, significa que sale más de lo que entra, se tiene un punto fuente.

Si $\text{div}\ \bar{F} < 0$ en un punto, significa que entra más de lo que sale, se tiene un pozo o sumidero.

Si $\text{div}\ \bar{F} = 0$ en un punto, significa que sale lo mismo que entra.

Si para cualquier punto $\text{div}\ \bar{F} = 0$ entonces el campo $\bar{F}$ recibe el nombre de campo solenoidal, en particular si el campo representa flujo, entonces se dice que el fluido es incompresible.

Ejemplo 2.31

Sea el campo vectorial $\bar{F}(x,y) = 2xy\, \boldsymbol{i} + xe^{y}\, \boldsymbol{j}$

obtener:

a) La divergencia en cualquier punto.

b) La divergencia en el punto (0,0).

c) La divergencia en el punto (1,1).

d) La divergencia en el punto (-1,-1).

Resolución

a) $\textit{div}\ \bar{F} = \bar{\nabla} \cdot \bar{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] \cdot [\, 2xy, xe^{y}\,] = 2y + xe^{y}$

b) $\textit{div}\ \bar{F}\,\big|_{(0,0)} = 2(0) + (0)e^{(0)} = 0$

c) $\text{div}\ \bar{F}\,\big|_{(1,1)} = 2 + e$

d) $\textit{div}\ \bar{F}\,\big|_{(-1,-1)} = -2 - e^{-1} = -2 - \frac{1}{e}$

En el ejemplo anterior se observa que un mismo campo puede tener puntos fuente, pozo e incompresibles.

Ejemplo 2.32

Obtener un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ cuya divergencia sea 3 en cualquier punto.

Resolución

Este ejemplo tiene múltiples soluciones, algunas de ellas son

$\bar{F}_1(x,y,z) = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$

$\bar{F}_2(x,y,z) = 3x\,\boldsymbol{i}$

$\bar{F}_3(x,y,z) = 3y\,\boldsymbol{j}$; etc.

Por otro lado, el rotacional de un campo vectorial indica en cada punto, los remolinos que forma el campo cerca de dicho punto.

Definición 2.18

El rotacional de un campo vectorial $\bar{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\bar{F} = \bar{F}(x,y,z) = f_1\,\boldsymbol{i} + f_2\,\boldsymbol{j} + f_3\boldsymbol{k}$$

donde $f_i = f_i(x,y,z) \quad i = 1,2,3$

se define como

$$\text{rot } \bar{F} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

Una forma fácil de recordar la expresión que define el rotacional de un campo se obtiene al utilizar el operador nabla.

$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$= \text{rot } \bar{F}$$

Es decir $\boxed{\textbf{\textit{rot}}\ \bar{F} = \bar{\nabla} \times \bar{F}}$

Si para cualquier punto del dominio de $\bar{F}$, $\textbf{\textit{rot}}\ \bar{F} = \bar{0}$ entonces el campo se llama *irrotacional* o *conservativo*, de lo contrario se dice que el campo es *rotacional* o *no conservativo*, y si el campo representa flujo entonces el flujo es turbulento.

Es importante observar que es posible obtener la divergencia de un campo en $\mathbb{R}^n$ utilizando la expresión $div\ \bar{F} = \bar{\nabla} \cdot \bar{F}$, sin embargo; el rotacional de un campo sólo está definido en $\mathbb{R}^3$, pudiéndose calcular el rotacional de un campo en $\mathbb{R}^2$ al considerarlo como un caso particular de un campo en $\mathbb{R}^3$ cuya componente en $\boldsymbol{k}$ es igual a cero.

Ejemplo 2.33

Obtener el rotacional del siguiente campo vectorial

$$\bar{F}(x,y,z) = 3x^2y\,\boldsymbol{i} + 2xz^3\,\boldsymbol{j} + y^4\,\boldsymbol{k}$$

Resolución

$$\textbf{\textit{rot}}\ \bar{F} = \bar{\nabla} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y & 2xz^3 & y^4 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{=(4y^3 - 6xz^2)\,\boldsymbol{i} + (2z^3 - 3x^2)\,\boldsymbol{k}}}$$

Propiedades de la Divergencia

Sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ campos vectoriales , ϕ y f funciones escalares, entonces:

1) $div\ (\bar{u} + \bar{v}) = \text{div}\ \bar{u} + \text{div}\ \bar{v}$

2) $div\ (\phi\bar{u}) = \phi\,\text{div}\ \bar{u} + \bar{\nabla}\phi \cdot \bar{u}$

3) $div\ (\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{u}) - \bar{u} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{v})$

4) $\text{div}\ (\phi\bar{\nabla}f) = \phi\bar{\nabla}^2 f + \bar{\nabla}\phi \cdot \bar{\nabla}f$

Donde $\bar{\nabla}^2 f$ es la divergencia del gradiente de f, es decir $div\ grad\ f = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}f = \bar{\nabla}^2 f$.

Propiedades del rotacional

Sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ y ϕ una función escalar , entonces:

1) $rot(\bar{u} + \bar{v}) = \text{rot}\,\bar{u} + \text{rot}\,\bar{v}$
2) $rot(\phi\,\bar{v}) = \bar{\nabla}\phi \times \bar{v} + \phi\,\text{rot}\,\bar{v}$
3) $div(\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot \text{rot}\,\bar{u} - \bar{u} \cdot \text{rot}\,\bar{v}$
4) $div(rot\,\bar{v}) = 0$
5) $\text{rot}(\text{grad}\,\phi) = \bar{0}$

Es importante destacar la última propiedad $\textbf{rot grad}\,\phi = \bar{0}$, la cual es fácilmente demostrable

$$\textbf{rot grad}\,\phi = \bar{\nabla} \times \bar{\nabla}\phi = \bar{\nabla} \times \left[\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right]$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \times \left[\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\,\partial y}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x}\right)\boldsymbol{k}$$

y por el teorema de derivadas parciales mixtas

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2\phi}{\partial z\,\partial y}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial z}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x}$$

se tiene finalmente que

$$rot\ grad\,\phi = \bar{\nabla} \times \bar{\nabla}\phi = \bar{0}$$

■

La divergencia del gradiente de un campo escalar es a su vez, otro campo escalar que tiene una especial importancia para los físicos, matemáticos e ingenieros.

Definición 2.19

La divergencia del gradiente de un campo escalar ϕ es

$$div\ \text{grad}\,\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

y se llama laplaciano de ϕ .

Por simplicidad, es muy común denotar al laplaciano mediante el operador nabla de la siguiente manera

$$div\ \text{grad}\,\phi = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}\phi = \bar{\nabla}^2\phi$$

Si la función escalar ϕ satisface la ecuación de Laplace

$$\boxed{\bar{\nabla}^2\phi = 0}$$

entonces la función ϕ se llama *función armónica*.

El Laplaciano de un campo escalar $\phi = \phi(x,y,z)$ en un punto (x_0,y_0,z_0) proporciona una medida de la diferencia entre $\phi(x_0,y_0,z_0)$ y el promedio de la función ϕ alrededor del punto (x_0,y_0,z_0).

Ejemplo 2.34

Utilizando las propiedades del rotacional para obtener $\text{rot}\,(\,\text{rot}\,\bar{F} + \text{grad}\,f\,)$

Resolución

$$\text{rot}\,(\,\text{rot}\,\bar{F} + \text{grad}\,f\,) = \text{rot}\,(\,\text{rot}\,\bar{F}\,) + \text{rot}\,(\,\text{grad}\,f\,)$$

puesto que rot (grad f) = $\bar{0}$

rot (rot $\bar{F}$ + grad f) = rot (rot $\bar{F}$)

Ejemplo 2.35

Dadas las funciones $u = 5x^2yz^3$ y $\bar{v}(x,y,z) = 3x\ \boldsymbol{i} + 2y\ \boldsymbol{j} + 5z\ \boldsymbol{k}$, obtener $\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}u \times \bar{v}$

Resolución

Efectuando operaciones

$$\bar{\nabla}u = 10xyz^3\ \boldsymbol{i} + 5x^2z^3\ \boldsymbol{j} + 15x^2yz^2\ \boldsymbol{k}$$

$$\bar{\nabla}u \times \bar{v} = (25x^2z^4 - 30x^2y^2z^2)\boldsymbol{i} + (45x^3yz^2 - 50xyz^4)\boldsymbol{j} + (20xy^2z^3 - 15x^3z^3)\boldsymbol{k}$$

finalmente

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla}u \times \bar{v}) = 50xz^4 - 60xy^2z^2 + 45x^3z^2 - 50xz^4 + 60xy^2z^2 - 45x^3z^2$$

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla}u \times \bar{v}) = 0$$

Ejemplo 2.36

Sea al función $F = 3xy^2z^3$ y el campo vectorial $\bar{u} = \bar{\nabla}F$

a) Comprobar la siguiente propiedad

$$\bar{\nabla} \cdot (F\bar{u}) = F(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) + (\bar{\nabla}F) \cdot \bar{u}$$

b) Determinar si $\bar{u}$ es irrotacional y si es solenoidal.

Resolución

a) Se tiene

$$\bar{u} = \bar{\nabla}F = \left[3y^2z^3\ ,\ 6xyz^3\ ,\ 9xy^2z^2\right]$$

$$F\bar{u} = \left[9xy^4z^6\ ,\ 18x^2y^3z^6\ ,\ 27x^2y^4z^5\right]$$

$$\bar{\nabla} \cdot (F\bar{u}) = 9y^4z^6 + 54x^2y^2z^6 + 135x^2y^4z^4 \qquad \ldots (a)$$

Por otro lado

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 6xz^3 + 18xy^2z$$

$$F(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) = 18x^2y^2z^6 + 54x^2y^4z^4 \qquad \ldots (b)$$

$$(\bar{\nabla}F) \cdot \bar{u} = \bar{u} \cdot \bar{u} = 9y^4z^6 + 36x^2y^2z^6 + 81x^2y^4z^4 \ldots (c)$$

De donde se observa que (a) es igual a (b) más (c)

b) Se tiene $\bar{\nabla} \times \bar{u} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \bar{u}$ es irrotacional

Por otro lado

$\boldsymbol{div}\ \bar{u} = \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 6xz^3 + 18x^2y^2z \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}$ no es solenoidal

---

Ejemplo 2.37

Si $\bar{a} = a_1\ \boldsymbol{i} + a_2\ \boldsymbol{j} + a_3\ \boldsymbol{k}$ es un campo vectorial solenoidal, cuyas componentes a_2 y a_3 son $a_2 = ye^x + y^2$ y $a_3 = -2xyz - e^xz - 2yz$ determinar la componente a_1 del campo.

Resolución

Por ser campo solenoidal $\textbf{div}\ \bar{a} = \bar{\nabla} \cdot \bar{a} = 0$

es decir $\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial y} + \dfrac{\partial \alpha_3}{\partial z} = 0$

obteniendo las derivadas parciales

$$\frac{\partial a_2}{\partial y} = e^x + 2y \qquad \frac{\partial a_3}{\partial z} = -2xy - e^x - 2y$$

sustituyendo

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + (e^x + 2y) + (-2xy - e^x - 2y) = 0$$

de donde

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = 2xy + e^x + 2y - e^x - 2y$$

finalmente $\qquad \alpha_1 = x^2y + f(y,z)$

Ejemplo 2.38

Dado el siguiente campo vectorial de un fluido

$$\bar{\boldsymbol{v}} = x^3y^2\,\boldsymbol{i} + y^3z^2\,\boldsymbol{j} + x^2z^3\,\boldsymbol{k}$$

determinar si el fluido es incompresible y si un pequeño cuerpo introducido en el fluido tendría sólo movimiento de traslación.

Resolución

Para la compresibilidad:

Si $div\ \bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\nabla}\cdot\bar{\boldsymbol{v}} = 0$ entonces el fluido es incompresible.

Calculando

$\bar{\nabla}\cdot\bar{\boldsymbol{v}} = 3x^2y^2 + 3y^2z^2 + 3x^2z^2 \neq 0$

$\therefore$ el fluido es compresible.

Para el movimiento:

Si □□□ $\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\nabla}\cdot\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{0}}$ el campo es irrotacional y el cuerpo tendrá sólo movimiento de traslación.

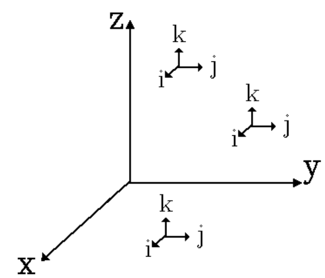
Calculando

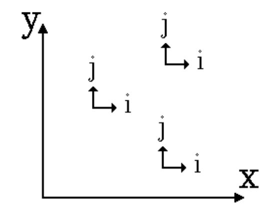
$$\bar{\nabla}\times\bar{\boldsymbol{v}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^3y^2 & y^3z^2 & x^2z^3 \end{vmatrix} = 2y^3z\boldsymbol{i} - 2xz^3\boldsymbol{j} + 2x^3y\,\boldsymbol{k} \neq 0$$

$\therefore$ El cuerpo NO tiene sólo movimiento de traslación, tiene rotación.

COORDENADAS CURVILÍNEAS

Hasta ahora, se han estudiado curvas y superficies referidas al sistema cartesiano rectangular, cuya base de vectores ortonormales es □$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ en el espacio, o $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ en el plano.



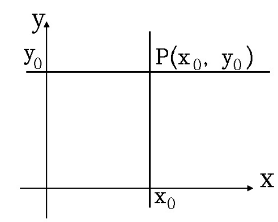


Sin embargo, si los problemas que se estudian poseen alguna simetría en particular, su análisis puede simplificarse utilizando algún otro sistema de referencia. Los sistemas coordenados que han resultado de mayor utilidad, a demás del cartesiano, son: el *polar* en el plano, y los sistemas *cilíndrico* y *esférico* en el espacio.

INTRODUCCIÓN

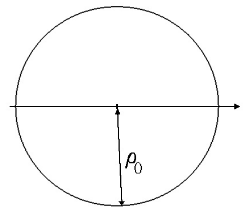
En el sistema cartesiano rectangular (x, y), un punto cualquiera (x_0, y_0) se localiza mediante l a intersección de las rectas $x = x_0$ y $y = y_0$.

El sistema se llama cartesiano en honor de René Descartes, y rectangular porque un punto se localiza por medio de la intersección de rectas. a intersección de las rectas.

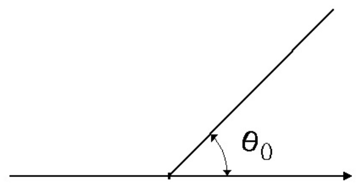


En el sistema polar (ρ,θ), un punto cualquiera (ρ_0,θ_0) se localiza mediante la intersección de los lugares geométricos $\rho=\rho_0$ y $\theta=\theta_0$.

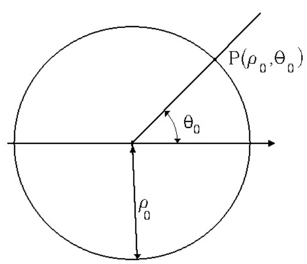
$\rho=\rho_0$ Representa una circunferencia de radio ρ_0 y centro en el origen.



$\theta=\theta_0$ Representa una semi-recta que forma un ángulo de θ_0 con respecto a la horizontal (eje polar).



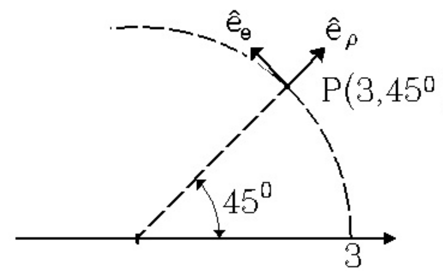
Finalmente un punto en coordenadas polares se localiza mediante la intersección de una circunferencia y una recta.



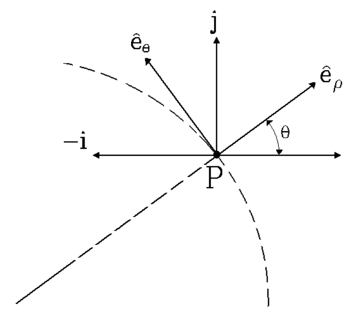
> **Definición 2.20**
> Si al localizar un punto en un sistema coordenado se utiliza al menos una curva, entonces el sistema coordenado se llama *sistema curvilíneo*.

Al igual que en el sistema cartesiano, el sistema polar también tiene vectores unitarios que forman una base $\{\hat{\boldsymbol{e}}_\rho,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\}$. Donde $\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$ es un vector unitario en la dirección de ρ y $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ es un vector unitario en la dirección de θ.

Por ejemplo, si se desea localizar el punto $(3,45^o)$ y dibujar $\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$ y $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$, se tiene:



A simple vista los vectores $\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$ y $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ parecen ortogonales. Es conveniente verificar si en efecto, dichos vectores forman un ángulo de 90º en cualquier punto, y para comprobar su ortogonalidad es necesario que se cumpla $\hat{\boldsymbol{e}}_\rho\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = 0$. Para ello, es necesario referir los vectores $\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$ y $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ a la base $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$.



De la figura,

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = |\hat{\boldsymbol{e}}_\rho|\cos\theta\ \boldsymbol{i} + |\hat{\boldsymbol{e}}_\rho|\operatorname{sen}\theta\ \boldsymbol{j}$$

pero $|\hat{\boldsymbol{e}}_\rho| = 1$, por lo que se puede reescribir

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos\theta\ \boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\ \boldsymbol{j}}$$

de forma análoga, se tiene

$$\hat{e}_\theta = (\,|\hat{e}_\theta|\,\mathrm{sen}\,\theta)(-\,\boldsymbol{i}) + |\hat{e}_\theta|\cos\theta\,\boldsymbol{j}$$

pero $|\hat{e}_\theta| = 1$, por lo que

$$\boxed{\hat{e}_\theta = -\,\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}}$$

Finalmente

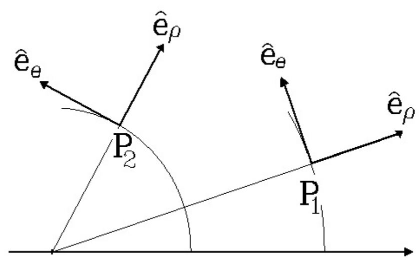
$$\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\theta = (\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{j})\cdot(-\,\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}) = 0$$

lo que implica que los vectores unitarios $\hat{e}_\rho$ y $\hat{e}_\theta$ son ortogonales.

Definición 2.21

Si para un sistema coordenado curvilíneo cualquiera, los vectores unitarios forman siempre un ángulo de 90° entre si, entonces el sistema se llama *sistema curvilíneo ortogonal.*

Si ahora se localizan dos puntos cualquiera $P_1(\rho_1,\theta_1)$ y $P_2(\rho_2,\theta_2)$ en el sistema polar y se dibujan sus respectivos vectores unitarios, se observa que dichos vectores cambian de dirección, o lo que es lo mismo, los vectores *no* son constantes.



Al variar los vectores unitarios $\hat{e}_\rho$ y $\hat{e}_\theta$ sus respectivas derivadas son distintas de cero, y es necesario obtenerlas.

Por ejemplo, si se tiene una ecuación vectorial en función de un parámetro t y referida a la base $\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\theta\}$

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{v}}(t) = v_\rho(t)\,\hat{e}_\rho + v_\theta(t)\,\hat{e}_\theta$$

entonces la derivada de $\bar{\boldsymbol{v}}$ con respecto de t es

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_\rho(t)\,\hat{e}_\rho\right) + \frac{d}{dt}\left(v_\theta(t)\,\hat{e}_\theta\right)$$

de donde

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{v}}}{dt} = v_\rho(t)\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} + \hat{e}_\rho\frac{d}{dt}v_\rho(t) + v_\theta(t)\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} + \hat{e}_\theta\frac{d}{dt}v_\theta(t) \quad \ldots (1)$$

Para calcular $\frac{d\hat{e}_\rho}{dt}$ y $\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$ se utilizan las expresiones

$$\hat{e}_\rho = \cos\theta\,\boldsymbol{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{j} \quad \ldots (2)$$

y

$$\hat{e}_\theta = -\,\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j} \quad \ldots (3)$$

De (2), y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = -\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{d\theta}{dt}\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\,\boldsymbol{j}$$

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = (-\,\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j})\,\frac{d\theta}{dt}$$, y sustituyendo (3)

$$\boxed{\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \hat{e}_\theta\,\frac{d\theta}{dt}} \quad \ldots (4)$$

de (3),

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\,\boldsymbol{i} - \mathrm{sen}\,\theta\,\frac{d\theta}{dt}\,\boldsymbol{j}$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -(\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{j})\,\frac{d\theta}{dt}$$, y sustituyendo (2)

$$\boxed{\frac{d\hat{\mathbf{e}}_\theta}{dt} = -\,\hat{\mathbf{e}}_\rho\,\frac{d\theta}{dt}} \qquad \ldots (5)$$

Finalmente, sustituyendo (4) y (5) en (1),

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \hat{\mathbf{e}}_\theta\, v_\rho(t)\frac{d\theta}{dt} + \hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{d}{dt}v_\rho(t) - \hat{\mathbf{e}}_\rho v_\theta(t)\frac{d\theta}{dt} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{d}{dt}v_\theta(t)$$

reagrupando

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}v_\rho(t) - v_\theta(t)\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\mathbf{e}}_\rho + \left(v_\rho(t)\frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dt}v_\theta(t)\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

FÓRMULA

Para una función vectorial

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}(t) = v_\rho(t)\,\hat{\mathbf{e}}_\rho + v_\theta(t)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

referida a la base polar $\{\hat{\mathbf{e}}_\rho, \hat{\mathbf{e}}_\theta\}$, entonces $\dfrac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt}$ se obtiene mediante:

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}v_\rho(t) - v_\theta(t)\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\mathbf{e}}_\rho + \left(v_\rho(t)\frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dt}v_\theta(t)\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Debe observarse que la expresión anterior fue generada para una función cualquiera referida a la base polar, si se desea en particular expresar la posición de una partícula en función del tiempo y referida a la base polar, se tiene que

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = r_\rho\,\hat{\mathbf{e}}_\rho$$

y solo existe componente radial. Si bien para localizar un punto en el sistema polar es necesario determinar el radio y el ángulo, el vector de posición de un punto no tiene componente transversal puesto que el valor del ángulo queda determinado con el vector $\hat{\mathbf{e}}_\rho$.

Entonces si

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = r_\rho\,\hat{\mathbf{e}}_\rho$$

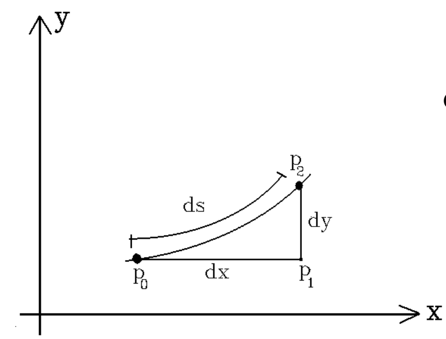
representa la posición de una partícula en función del tiempo t y referida a la base $\{\hat{\mathbf{e}}_\rho, \hat{\mathbf{e}}_\theta\}$, la velocidad y la aceleración de la partícula están dadas por:

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = \frac{dr_\rho}{dt}\,\hat{\mathbf{e}}_\rho + r_\rho\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\bar{\mathbf{a}}(t) = \left(\frac{d^2 r_\rho}{dt^2} - r_\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\hat{\mathbf{e}}_\rho + \left(r_\rho\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\,\frac{dr_\rho}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

LONGITUD DE ARCO EN COORDENADAS POLARES

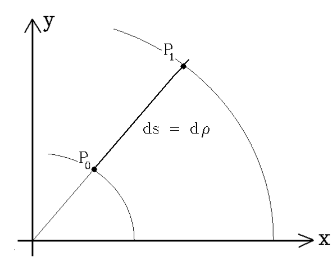
Considérese ahora una porción de curva y los puntos P_o y P_2, en un sistema rectangular.

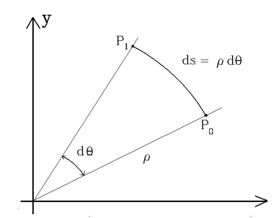


Como las distancias son infinitesimales

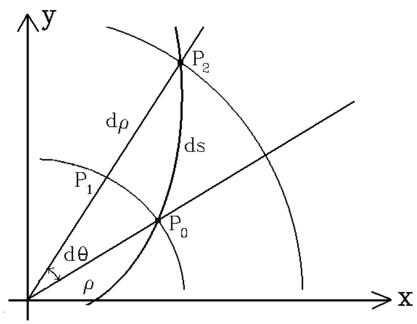
$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

En el caso polar se tiene





Puesto que la longitud de un arco en función del ángulo central es $ds = \rho\, d\theta$ de donde



$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

en coordenadas polares

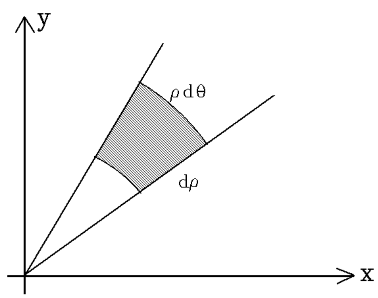
$$(ds)^2 = (d\rho)^2 + (\rho\, d\theta)^2$$
$$= 1\,(d\rho)^2 + \rho^2\,(d\theta)^2$$

Donde 1 , ρ, son factores de escala.

Los *factores de escala* son aquellos elementos que multiplican a las diferenciales de las coordenadas de referencia curvilíneo.

DIFERENCIAL DE ÁREA EN COORDENADAS POLARES

Para el cálculo de áreas, el elemento de área en coordenadas polares es:



$$dA = \rho\, d\rho\, d\theta$$

GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN EN COORDENADAS POLARES

Si $f = f(\rho,\theta)$, para encontrar $\bar{\nabla} f(\rho,\theta)$ se utilizará el concepto de derivada direccional, $\frac{df}{ds} = \bar{\nabla} f \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{u}}$.

La derivada direccional en la dirección de ρ (θ constante) es $\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial \rho}$.

La derivada direccional en la dirección de θ (ρ constante) es $\frac{df}{ds} = \frac{df}{\rho\, d\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}$ puesto que el elemento longitud arco ds en la dirección de θ es $\rho\, d\theta$.

Por lo tanto, si $f = f(\rho,\theta)$ entonces

$$\boxed{\bar{\nabla} f(\rho,\theta) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{e}}_{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{e}}_{\theta}}$$

Ejemplo 2.39

Sea la función $f(\rho,\theta) = \rho\theta$, obtener $\bar{\nabla} f$.

Resolución

$$\bar{\nabla} f(\rho,\theta) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{e}}_{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{e}}_{\theta}$$

obteniendo las derivadas

$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \theta$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial \theta} = \rho$, sustituyendo: $\qquad \bar{\nabla} f = \theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_{\rho} + \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta}$

Ejemplo 2.40

Referir $\bar{\nabla} f(\rho,\theta) = \theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_{\rho} + \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta}$ a la base $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$.

Resolución

$$\bar{\nabla} f(\rho,\theta) = \theta\,\hat{e}_\rho + \hat{e}_\theta$$

pero $\hat{e}_\rho = \cos\theta\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j}$

$\hat{e}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}$, sustituyendo

$$\bar{\nabla} f(\rho,\theta) = \theta(\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j}) + (-\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j})$$

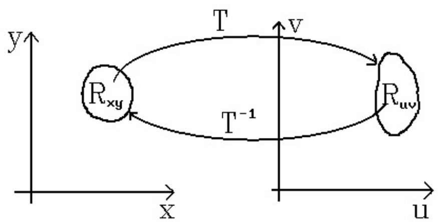
Reagrupando

$$\bar{\nabla} f(\rho,\theta) = (\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\,\boldsymbol{i} + (\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)\,\boldsymbol{j}$$

CAMBIO DE VARIABLES: JACOBIANO DE LA TRANSFORMACIÓN

En el curso de Cálculo II se estudió al jacobiano como un determinante que resultaba al resolver sistemas de ecuaciones, pero el jacobiano es mucho más que sólo eso. La aplicación más importante e interesante del jacobiano es utilizarlo como un factor al realizar un cambio de un sistema coordenado a otro.

Considérese una región R_{xy} que es transformada en una región R_{uv} mediante una regla de correspondencia biunívoca,



dada por: $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$

entonces el jacobiano de x e y con respecto a u y v, $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right)$, recibe el nombre de jacobiano de la transformación y proporciona una relación entre las áreas de R_{xy} y R_{uv} de acuerdo al siguiente teorema.

Teorema

Sean R_{xy} una región en el plano xy y R_{uv} una región en el plano uv, relacionadas mediante las ecuaciones de transformación $x = f(u,v)$ y $y = g(u,v)$ de forma que un punto de R_{xy} es imagen de un único punto de R_{uv}. Si f y g son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en R_{uv} y $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right)$ es distinto de cero en R_{uv} entonces:

$$A_{R_{xy}} = \left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| A_{R_{uv}}$$

PROPIEDADES DEL JACOBIANO

1) Dada una transformación

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$

si $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right) \neq 0$, entonces $J\left(\dfrac{u,v}{x,y}\right) = \dfrac{1}{J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right)}$

2) Si existe una composición tal que:

$$\begin{matrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{matrix} \quad \text{donde} \quad \begin{matrix} u = u(p,q) \\ v = v(p,q) \end{matrix}$$

entonces $J\left(\dfrac{x,y}{p,q}\right) = J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right) J\left(\dfrac{u,v}{p,q}\right)$

Ejemplo 2.41

Sea la regla de transformación

$$T : \begin{cases} x = f(u,v) = -\frac{1}{3}(u-v) \\ y = g(u,v) = \frac{1}{3}(u+v) \end{cases}$$

y R_{xy}, la región limitada por las gráficas de $x = 0$, $x + y = 2$ y $y - x = -1$.

a) Dibujar R_{xy} en el plano xy.

b) Obtener el área de la región R_{xy}.

c) Dibujar la imagen de la región R_{xy} en el plano uv (R_{uv}).

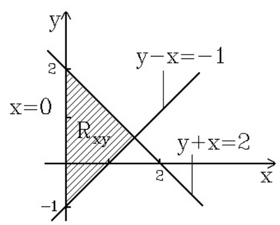
d) Obtener el área de la región R_{uv}.

e) Calcular la relación entre las áreas $\frac{A_{R_{xy}}}{A_{R_{uv}}}$.

f) Obtener el jacobiano de la transformación $J\left(\frac{x\,,y}{u\,,v}\right)$.

Resolución

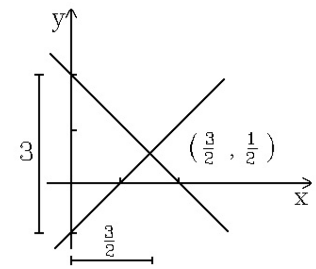
a) Se traza la gráfica de cada una de las rectas en el plano xy, y la región R_{xy} es la porción del plano *contenida* por las tres rectas.



b) Existen varias formas para calcular el área de la región,puesto que la región es un triángulo, el área se obtiene mediante:

$$A_{R_{xy}} = \frac{(\,base\,)\,(\,altura\,)}{2}$$

la base es el lado del triángulo que coincide con el eje y,y vale 3 unidades; la altura es la abscisa del punto de intersección de las rectas $x + y = 2$ y $y - x = -1$ y vale $\frac{3}{2}$.



Finalmente $A_{R_{xy}} = \dfrac{(3)\left(\frac{3}{2}\right)}{2} = \dfrac{9}{4}$

c) Para dibujar la imagen en uv es necesario aplicar la transformación a cada una de las rectas que limitan la región en xy.

Para la recta $x + y = 2 \;\overset{T}{\rightarrow}$

se sustituyen x e y utilizando las reglas de transformación

$$x + y = 2 \;\overset{T}{\rightarrow}\; \left(-\tfrac{1}{3}(u - v)\right) + \left(\tfrac{1}{3}(u + v)\right) = 2$$

simplificando $$-\frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v + \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v = 2$$

$$\frac{2}{3}v = 2$$

$$v = 3$$

Para $y - x = -1$

$$y - x = -1 \;\overset{T}{\rightarrow}\; \left(\tfrac{1}{3}(u + v)\right) - \left(-\tfrac{1}{3}(u - v)\right) = -1$$

$$\frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v + \frac{1}{3}u - \frac{1}{3}v = -1$$

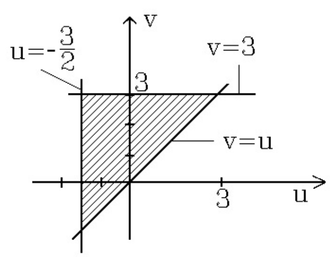
$$\frac{2}{3}u = -1 \qquad \text{entonces} \quad u = -\frac{3}{2}$$

Para $x = 0$

$$x = 0 \xrightarrow{T} -\tfrac{1}{3}(u - v) = 0$$

$$-\frac{1}{3}v + \frac{1}{3}u = 0 \text{ entonces } v = u$$

finalmente la imagen de la región R_{xy} en el plano uv es



d) Puesto que la región R_{uv} es triangular, su área es

$$A_{Ruv} = \frac{b\,h}{2} = \frac{\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{9}{2}\right)}{2} = \frac{81}{8}$$

e) La relación entre las áreas es

$$\frac{A_{Rxy}}{A_{Ruv}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{81}{8}} = \frac{2}{9}$$

f) El jacobiano de la transformación

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{2}{9}$$

En el ejemplo anterior se puede observar con facilidad como $\left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right|$ es igual a la relación entre las áreas $\frac{A_{Rxy}}{A_{Ruv}}$; sin embargo, debe tenerse en cuenta que, en general, el jacobiano es una función cuyo valor dependerá del punto en el que se evalúe, por lo que cuando el jacobiano de transformación no es constante, el *mapeo* o relación entre las regiones, debe hacerse punto por punto. Esta relación entre regiones punto por punto tiene su principal aplicación al calcular áreas y volúmenes de superficies y cuerpos utilizando un sistema coordenado distinto del cartesiano. Ejemplos relacionados con estos cálculos se estudiarán en el capítulo IV del curso.

Ejemplo 2.42

Sean las ecuaciones de transformación

$$x = u + v$$

$$y = u - v^2$$

Obtener $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$ en función de u y v, utilizando las propiedades del jacobiano.

Resolución

Puesto que se proporcionan las ecuaciones de transformación de (u,v) a (x,y), se puede obtener de forma directa el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$, pero utilizando la primera propiedad

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = 1, \text{ se tiene}$$

$$J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \frac{1}{J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)}$$

de donde

$$J\left(\frac{u\,,v}{x\,,y}\right) = \frac{1}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2v \end{vmatrix}} = \frac{1}{-2v-1}$$

$$J\left(\frac{u\,,v}{x\,,y}\right) = -\frac{1}{2v+1}$$

Ejemplo 2.43

Dada la transformación

$$x = 3u - v$$
$$y = u + 3v$$

a) Dibujar la región de R' del plano uv en la cual se transforma la región R del plano xy limitada por las gráficas de $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y $y = 1$.

b) Calcular $J\left(\dfrac{x\,,\,y}{u\,,\,v}\right)$

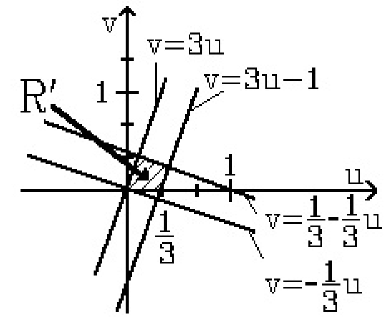
c) Determinar la relación entre el área de R y el área de R'.

Resolución

a) Aplicando la transformación a cada una de las ecuaciones

$$x = 0 \;\rightarrow\; 3u - v = 0 \;\Rightarrow\; v = 3u$$
$$x = 1 \;\rightarrow\; 3u - v = 1 \;\Rightarrow\; v = 3u - 1$$
$$y = 0 \;\rightarrow\; u + 3v = 0 \;\Rightarrow\; v = -\tfrac{1}{3}u$$
$$y = 1 \;\rightarrow\; u + 3v = 1 \;\Rightarrow\; v = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}u$$

Por lo que la región R' es



b) $$J\left(\frac{u\,,v}{x\,,y}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 1 = 10$$

c) Puesto que $\quad A_{R_{xy}} = \left| J\left(\dfrac{x\,,y}{u\,,v}\right) \right| A_{R_{uv}}$, la relación entre las áreas es

$$\frac{A_{R_{xy}}}{A_{R_{uv}}} = 10$$

COORDENADAS CURVILÍNEAS ORTOGONALES

La transformación entre las coordenadas de un punto $(u\,,v\,,w)$ en coordenadas curvilíneas a un punto (x,y,z) en coordenadas cartesianas se define por medio de :

$$x = x(u\,,v\,,w)$$
$$y = y(u\,,v\,,w)$$
$$z = z(u\,,v\,,w) \qquad \ldots (1)$$

donde x, y y z tienen sus primeras derivadas parciales continuas y su jacobiano es distinto de cero en una cierta región, es decir

$$J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) \neq 0$$

Los puntos en los que $J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) = 0$, se llaman puntos singulares, y en dichos puntos no existe la transformación inversa.

Por otro lado, para los puntos no singulares se puede obtener la transformación inversa

$$\begin{aligned} u &= u(x,y,z) \\ v &= v(x,y,z) \\ w &= w(x,y,z) \end{aligned} \qquad \ldots (2)$$

Si la función vectorial $\bar{\boldsymbol{r}}$ representa el vector de posición de un punto en el espacio, entonces $\bar{\boldsymbol{r}} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$

y al sustituir (1), se tiene

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(u,v,w) = x(u,v,w)\,\boldsymbol{i} + y(u,v,w)\,\boldsymbol{j} + z(u,v,w)\,\boldsymbol{k}$$

Esta función representa un "*mapaeo*" o cambio de coordenadas de un punto en coordenadas (u,v,w) a un punto en coordenadas (x,y,z) y referido a la base de vectores ortonormales $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Si en la función vectorial $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(u,v,w)$ se fijan dos variables, por ejemplo v y w, entonces $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(u,v_0,w_0)$ es una curva coordenada, y se puede obtener un vector tangente a dicha curva al derivar la función $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(u,v_0,w_0)$, de igual manera, se pueden obtener curvas coordenadas al fijar a u y w, y a u y v, respectivamente, por lo tanto, en un punto P, los vectores unitarios y tangentes a las curvas coordenadas son:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_u = \frac{1}{\left|\frac{\partial\bar{\boldsymbol{r}}}{\partial u}\right|}\frac{\partial\bar{\boldsymbol{r}}}{\partial u} \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_v = \frac{1}{\left|\frac{\partial\bar{\boldsymbol{r}}}{\partial v}\right|}\frac{\partial\bar{\boldsymbol{r}}}{\partial v} \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_w = \frac{1}{\left|\frac{\partial\bar{\boldsymbol{r}}}{\partial w}\right|}\frac{\partial\bar{\boldsymbol{r}}}{\partial w}$$

Y si renombramos

$$\begin{aligned} h_u &= \left|\frac{\partial\bar{\boldsymbol{r}}}{\partial u}\right| \\ h_v &= \left|\frac{\partial\bar{\boldsymbol{r}}}{\partial v}\right| \\ h_w &= \left|\frac{\partial\bar{\boldsymbol{r}}}{\partial w}\right| \end{aligned} \qquad \ldots (3)$$

entonces se puede escribir

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{e}}_u &= \frac{1}{h_u}\frac{\partial\bar{\boldsymbol{r}}}{\partial u} \\ \hat{\boldsymbol{e}}_v &= \frac{1}{h_v}\frac{\partial\bar{\boldsymbol{r}}}{\partial v} \\ \hat{\boldsymbol{e}}_w &= \frac{1}{h_w}\frac{\partial\bar{\boldsymbol{r}}}{\partial w} \end{aligned} \qquad \ldots (4)$$

donde h_u, h_v y h_w son los factores de escala y satisfacen $h_u\,h_v\,h_w = \left|J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right)\right|$

Por otro lado, al considerar la transformación inversa (2),

$$u = u(x,y,z). \qquad \ldots (2a)$$
$$v = v(x,y,z) \qquad \ldots (2b)$$
$$w = w(x,y,z) \qquad \ldots (2c)$$

se observa que cada función escalar representa una hipersuperficie y para representarla en un espacio de 3 dimensiones es necesario utilizar el concepto de superficies de nivel. Por ejemplo, si en la ecuación (2a) se fija el valor de u, entonces

$$u_0 = u(x,y,z) \qquad \ldots (2a')$$

representa una superficie de nivel, y el vector normal unitario a la superficie coordenada (de coordenada $u = u_0$) está dado por $\frac{1}{|\bar{\nabla} u|}\bar{\nabla} u$. Es decir, los vectores $\hat{e}_u$, $\hat{e}_v$, $\hat{e}_w$ normales en el punto P a las superficies coordenadas u , v , w , son:

$$\hat{e}_u = \frac{1}{|\bar{\nabla} u|}\bar{\nabla} u$$
$$\hat{e}_v = \frac{1}{|\bar{\nabla} v|}\bar{\nabla} v \qquad \ldots (5)$$
$$\hat{e}_w = \frac{1}{|\bar{\nabla} w|}\bar{\nabla} w$$

NOTA: *Los vectores unitarios tangentes a las curvas coordenadas y los vectores unitarios normales a las superficies coordenadas en un punto P son los mismos vectores, sólo si el sistema coordenado es ortogonal.*

Puesto que u, v, w forman un sistema ortogonal y $\hat{e}_u$, $\hat{e}_v$ y $\hat{e}_w$ son de módulo unitario se tiene

$$\hat{e}_u \cdot \hat{e}_u = 1$$
$$\left(\frac{1}{h_u}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\right) \cdot \left(\frac{1}{|\bar{\nabla} u|}\bar{\nabla} u\right) = 1$$
$$\frac{1}{h_u\,|\bar{\nabla} u|}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \cdot \bar{\nabla} u = 1 \qquad \ldots (6)$$

recordando que $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{k}$

y $\bar{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$

entonces $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \cdot \bar{\nabla} u = 1$

debido a que, de (2a)

$$u = u(x, y, z) \qquad \text{y sustituyendo (1)}$$
$$= u(x(u, v, w)\,,\, y(u, v, w)\,,\, z(u, v, w))$$

derivando con respecto de u se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = 1 \qquad \ldots (8)$$

sustituyendo (7) en (6) $\frac{1}{h_u\,|\bar{\nabla} u|} = 1$

finalmente $|\bar{\nabla} u| = \frac{1}{h_u}$

de manera análoga $|\bar{\nabla} v| = \frac{1}{h_v}$ y $|\bar{\nabla} w| = \frac{1}{h_w}$

es decir :

$$\boxed{\begin{aligned} h_u &= \frac{1}{|\bar{\nabla} u|} \\ h_v &= \frac{1}{|\bar{\nabla} v|} \\ h_w &= \frac{1}{|\bar{\nabla} w|} \end{aligned}} \qquad \ldots (9)$$

Y sustituyendo (9) en (5)

$$\hat{e}_u = h_u \bar{\nabla} u$$
$$\hat{e}_v = h_v \bar{\nabla} v$$
$$\hat{e}_w = h_w \bar{\nabla} w \qquad \ldots (10)$$

El elemento diferencial de longitud de arco en coordenadas curvilíneas ortogonales es:

$$(ds)^2 = (h_u\ du)^2 + (h_v\ dv)^2 + (h_w\ dw)^2$$

El elemento diferencial de volumen en coordenadas curvilíneas ortogonales es:

$$\boxed{dV = h_u h_v h_w\ du\,dv\,dw}$$

o bien $$dV = \left| J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) \right| du\ dv\ dw$$

GRADIENTE, DIVERGENCIA Y ROTACIONAL EN COORDENADAS CURVILÍNEAS ORTOGONALES

Si $f = f(u,v,w)$ es una función escalar, el gradiente en coordenadas curvilíneas es

$$\text{grad } f = \bar{\nabla} f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\,\hat{\boldsymbol{e}}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\,\hat{\boldsymbol{e}}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\,\hat{\boldsymbol{e}}_w$$

Si $\bar{\boldsymbol{F}} = \bar{\boldsymbol{F}}(u,v,w) = f_u\,\hat{\boldsymbol{e}}_u + f_v\,\hat{\boldsymbol{e}}_v + f_w\,\hat{\boldsymbol{e}}_w$ es una función referida a la base $\{\hat{\boldsymbol{e}}_u, \hat{\boldsymbol{e}}_v, \hat{\boldsymbol{e}}_w\}$, entonces:

La divergencia es:

$$\text{div } \bar{\boldsymbol{F}} = \bar{\nabla}\cdot\bar{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w f_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u h_w f_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v f_w)\right]$$

El rotacional se obtiene mediante:

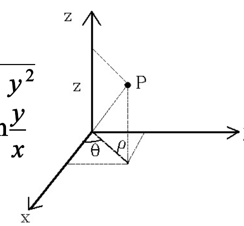
$$\text{rot } \bar{\boldsymbol{F}} = \bar{\nabla}\times\bar{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{\boldsymbol{e}}_u & h_v\hat{\boldsymbol{e}}_v & h_w\hat{\boldsymbol{e}}_w \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_u f_u & h_v f_v & h_w f_w \end{vmatrix}$$

El laplaciano de la función escalar $f = f(u,v,w)$ en coordenadas curvilíneas es:

$$\text{div grad } f = \bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla} f = \bar{\nabla}^2 f = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u h_w}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]$$

Coordenadas cilíndricas

$$T : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \qquad T^{-1} : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{ang tan}\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

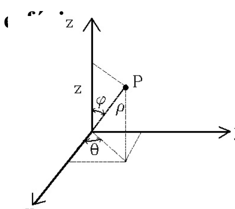


Función escalar $f = f(\rho, \theta, z)$

Función vectorial $\bar{\boldsymbol{F}} = \bar{\boldsymbol{F}}(\rho, \theta, z) = f_\rho\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + f_\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + f_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

Los factores de escala son : $\boxed{\begin{aligned} h_\rho &= 1 \\ h_\theta &= \rho \\ h_z &= 1 \end{aligned}}$

Coordenadas



$$T : \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \quad T^{-1} : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \operatorname{ang\,tan} \dfrac{y}{x} = \operatorname{ang\,sen} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \phi = \operatorname{ang\,cos} \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \operatorname{ang\,tan} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{cases}$$

Función escalar $\quad f = f(\rho , \phi , \theta)$

Función vectorial $\quad \bar{F} = \bar{F}(\rho , \phi , \theta) = f_\rho \hat{e}_\rho + f_\phi \hat{e}_\phi + f_\theta \hat{e}_\theta$

Los factores de escala son : $\boxed{\begin{array}{l} h_\rho = 1 \\ h_\phi = \rho \\ h_\theta = \rho \operatorname{sen}\phi \end{array}}$

Ejemplo 2.44

Obtener los factores de escala y el jacobiano de transformación de las coordenadas cilíndricas parabólicas (u, v, z), si las ecuaciones de transformación son

$$x = \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2) \qquad -\infty < u < \infty$$

$$y = uv \qquad v \geq 0$$

$$z = z \qquad -\infty < z < \infty$$

Resolución

Para obtener los factores de escala se plantea primero la función $\bar{r}$

$$\bar{r} = \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2)\, \boldsymbol{i} + uv\, \boldsymbol{j} + z\, \boldsymbol{k}$$

de donde

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = u\, \boldsymbol{i} + v\, \boldsymbol{j} \qquad h_u = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = -v\, \boldsymbol{i} + u\, \boldsymbol{j} \qquad h_v = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial z} = \boldsymbol{k} \qquad h_z = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} \right| = 1$$

El jacobiano de la transformación $J\left(\dfrac{x, y, z}{u, v, z}\right)$ es

$$J\left(\frac{x, y, z}{u, v, z}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & -v & 1 \\ v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = u(u) + v(v) + 1(0)$$

$$= \underline{\underline{u^2 + v^2}}$$

Obsérvese que el valor absoluto del producto de los factores de escala es igual al jacobiano de la transformación.

Ejemplo 2.45

Sea el sistema de coordenadas curvilíneas (u, v), el cual está referido al sistema cartesiano (x, y) por medio de las relaciones:

$$u = -3x + y, \quad v = x + 3y$$

a) Verificar que el sistema uv sea ortogonal.

b) Dibujar la región R' del plano uv en la que se transforma la región R del plano xy limitada por las rectas

$y = 3x,\ y = 3x - 6,\ x = -3y + 18,\ x = -3y + 6$

c) Calcular $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$.

d) Determinar la relación entre las áreas de R y R'.

Resolución

a) De las ecuaciones de transformación

$$\bar{\nabla} u = -3\ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$$

$$\bar{\nabla} v = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$$

de donde

$$\bar{\nabla} u \cdot \bar{\nabla} v = [-3,1] \cdot [1,3] = -3 + 3 = 0$$

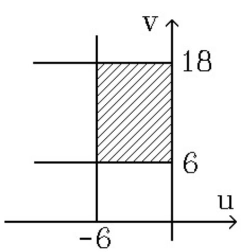
por lo que el sistema uv es ortogonal

b) Para la región R se tiene que reacomodar $-3x + y = 0$, $-3x + y = -6$, $x + 3y = 18$, $x + 3y = 6$

de donde; transformando al sistema uv, se tiene

$u = 0,\ u = -6,\ v = 18,\ v = 6$

por lo que la región R' es



c) Se tiene

$$J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$\Rightarrow\ J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = -\frac{1}{10}$$

d) $A_R = \dfrac{1}{10} A_{R'}$

GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE GRADIENTE Y DERIVADA DIRECCIONAL

Anteriormente se estudió el gradiente de una función escalar , $f = f(x, y, z)$

$$\text{grad} f = \bar{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

Sin embargo, el concepto de gradiente es mucho más general , y es aplicable a funciones vectoriales, es decir,

si $\bar{F} = f_1(x, y, z)\ \boldsymbol{i} + f_2(x, y, z)\ \boldsymbol{j} + f_3(x, y, z)\ \boldsymbol{k}$

entonces:

$$\textbf{grad}\ \bar{F} = \bar{\nabla}\ \bar{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Con esta generalización del gradiente, la derivada direccional definida para una función escalar como

$$\frac{df}{ds} = \bar{\nabla} f \cdot \hat{\boldsymbol{e}}$$

también se generaliza, teniéndose

$$\frac{d\bar{F}}{ds} = \left[\bar{\nabla}\,\bar{F}\right][\hat{e}]$$

$$= \bar{\nabla} f_1 \cdot \hat{e}\; \boldsymbol{i} + \bar{\nabla} f_2 \cdot \hat{e}\; \boldsymbol{j} + \bar{\nabla} f_3 \cdot \hat{e}\; \boldsymbol{k}$$

Ejemplo 2.46

Obtener el gradiente de la función vectorial $\bar{F}$, si

$$\bar{F} = \bar{F}(x\,,\,y\,,\,z) = 3xy\;\boldsymbol{i} + e^{xyz}\;\boldsymbol{i} + x^2yz\;\boldsymbol{k}$$

Resolución

$$\bar{\nabla}\bar{F} = \begin{bmatrix} 3y & 3x & 0 \\ yze^{xyz} & xze^{xyz} & xye^{xyz} \\ 2xyz & x^2z & x^2y \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.47

Obtener la derivada direccional de $\bar{F}$ (del ejemplo anterior) en el punto $(1\,,\,1\,,\,1)$ y en dirección de $\bar{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Resolución

$$\frac{d\bar{F}}{ds} = [\bar{\nabla}\bar{F}]\;\;[\hat{e}] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ e & e & e \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \\ \frac{e}{\sqrt{3}} + \frac{e}{\sqrt{3}} + \frac{e}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{3}} \\ \frac{3}{\sqrt{3}}e \\ \frac{4}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

o bien $$\frac{d\bar{F}}{ds} = \frac{6}{\sqrt{3}}\;\boldsymbol{i} + \frac{3}{\sqrt{3}}e\;\boldsymbol{j} + \frac{4}{\sqrt{3}}\;\boldsymbol{k}$$

Ejemplo 2.48

El campo de velocidades de un fluido está dado por $\bar{U} = x^2y\;\boldsymbol{i} + y^2z\;\boldsymbol{j} + xz^2\;\boldsymbol{k}$, en donde x,y,z están en metros y $|\,\bar{U}\,|$ en metros por segundo.

Calcular la rapidez de crecimiento del campo $\bar{U}$ en el punto $A(2,1,1)$ y en dirección al punto $B(4,3,2)$.

Resolución

La rapidez de crecimiento está dada por el módulo de la derivada direccional.

La matriz gradiente del campo $\bar{U}$ es:

$$\bar{\nabla}\bar{U} = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & 2yz & y^2 \\ z^2 & 0 & 2xz \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\nabla}\bar{U}\;|_A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

para la dirección $\bar{AB} = [2,2,1] \quad \Rightarrow \quad \hat{e} = \frac{1}{3}[2,2,1] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Entonces sustituyendo en:

$$\frac{d\bar{U}}{ds} = [\bar{\nabla}\bar{U}] \ \ [\hat{e}]$$

se tiene

$$\frac{d\bar{U}}{ds} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\left|\frac{d\bar{U}}{ds}\right| = 5.935 \ \frac{m/s}{m}}$$ que es la rapidez pedida.

BIBLIOGRAFÍA

Análisis Vectorial.- Hsu, Hwei P.- Addison Wesley Iberoamérica.- México, 1986.

Cálculo Vectorial.- Marsden, Jerrold E. y Tromba, Anthony J. .- Addison-Wesley Iberoamerica, S.A..- 5a. edición.- España, 2004.

Análisis Vectorial.- Spiegel, Murray R..-Mc Graw-Hill.-México, 1991.

Cálculo, Conceptos y Contextos.- Stewart, James.- Editorial Thomson.- Tercera Edición.- México, 2006.

Análisis Matemático.- Protter, Murray H. y Morrey, Charles B. Jr. .- Fondo educativo interamericano S.A. .- Perú, 1969.

Geometría Diferencial.- Lipschutz, Martin.- Mc Graw-Hill.- Colombia, 1971.

Análisis Vectorial.- Brand, Louis.- C.E.C.S.A..- México, 1983.

Cálculo Avanzado.- Fulks, Watson.- Limusa.- México, 1991.

Calculus, volumen 2.- Apostol, Tom M..- Editorial Reverté, S.A. .- 2a. edición .- España, 1980.

Fundamentos de Cálculo Avanzado.- Taylor, Angus E. y Mann, W. Robert.- Editorial Noriega-Limusa.- México, 1989.

Problemas y ejercicios de análisis matemático.- Demidovich, B. .- Editorial MIR.- URSS, 1977.

Cálculo y Geometría Analítica.- Larson, Roland P. y Hostetler, Robert P. .- McGraw-Hill.- 8a. edición.- China, 2006.

Cálculo con Geometría Analítica.- Zill, Dennis G..- Grupo Editorial Iberoamérica.- México, 1987.

Cálculo Vectorial.- Pita Ruiz, Claudio.-Prentice-Hall Hispanoamérica.- México, 1995.
Advanced Calculus.- REA.- EE.UU. 1991.

Cálculo con Geometría Analítica.- Swokowski, Earl W.- Grupo Editorial Iberoamérica.- Segunda edición.- México, 1988.

Cálculo, Tomo 2.- Smith, Robert T. y Minton, Roland B.- Segunda edición.-McGraw-Hill.- Madrid, 2002.

Advanced Calculus (Problem Solver).- Fogiel, M.- REA.- USA, 1991
